

The allocation system and rationality measures in the valuation of mixed-crop agricultural land

Francesca Salvo¹, Daniela Tavano^{1,*}, Giovanni Rubuano²

¹ Department of Environmental Engineering, University of Calabria, Rende, Via Pietro Bucci, 87036 Arcavacata, Italy; francesca.salvo@unical.it; daniela.tavano@unical.it

² GEO.VAL.ESPERTI Association, Circonvallazione Clodia 163/167, 00183 Roma, Italia; consulente@giovannirubuano.it

* corresponding author

Keywords

allocation system, market-oriented procedures, similarity, reliability, choice of comparable sales, ideal point method

Abstract

The valuation of agricultural land is a complex task, influenced by markets characterized by low transparency and limited activity, which restrict the ability to form a sufficiently representative real estate sample. The lack of information that typifies land markets makes traditional statistical and econometric models impractical. In contrast, mathematical models based on valuation systems, such as the General Appraisal System (GAS) and the Allocation System (AR), offer an effective solution. The AR, in particular, breaks down the value of a complex property into its main components, using implicit average prices to quantify the contribution of each part to the overall price. This method, primarily used for appraising average values related to surface characteristics, is well suited for the evaluation of land with multiple types of crops. Although the valuation literature attests to its reliability as a tool for assessing agricultural land, its practical application remains relatively limited. To address this gap, the present work examines the applicability of AR to land markets through the presentation of a concrete valuation case study. The main objectives are to illustrate the process of determining the assessed value and to analyze the benefits of the optimal selection of comparable sales. This phase, conducted by applying specific measures to the appraisal sample, highlights the importance of selecting comparable properties, which can be crucial in distinguishing between heterogeneous valuation results, often difficult to interpret and justify without appropriate valuation criteria.

1. Introduction

In the field of real estate appraisals, the need for procedures that ensure accurate and reliable assessments often conflicts with the limited transparency of the Italian real estate market. This lack of transparency complicates access to sufficient real estate data (Morano et al., 2024; Salvo et al., 2021b; De Ruggiero et al., 2022). As a result, the absence of information undermines professional activities by diminishing the availability of essential market data necessary for precise appraisals. This issue not only affects the appraisal process but also impacts the market and shapes investment decisions (Simonotti, 2009; De Paola et al., 2023; De Paola, 2024; Salvo et al., 2022; Salvo et al., 2023; d'Amato, 2017; d'Amato, 2018). The challenge is particularly significant in the land asset

sector, where the infrequency of sales transactions further aggravates the issue of limited transparency. Under these circumstances, employing statistical and econometric models becomes impractical due to the insufficient availability of observable data. Furthermore, direct (monoparametric) appraisal methods are discouraged, as they rely on a single parameter that fails to capture the inherent complexity of land assets (Simonotti, 2009; Yalpir & Unel, 2017). In contrast, mathematical models based on valuation systems are well-equipped to address the operational realities of land markets, enabling appraisals even in the presence of limited sample data. Noteworthy examples include the General Appraisal System (GAS) and the Allocation System (AS). The GAS seeks to deliver a quantitative evaluation of the estimated value using a holistic approach that considers the asset in its entirety. In contrast, the AS seeks to deconstruct the overall value into distinct components, assigning a partial value to each (Famularo, 1940). These models are formally recognized by both the Real Estate Appraisal Code (Tecnoborsa, 2018) and the Guidelines for the Valuation of Real Estate Securing Credit Exposures (ABI, 2022). This recognition underscores the practical and reliable application of mathematical theory in real estate appraisal, even in contexts characterized by limited data, aligning with the requirements of the market comparison method.

The AS method is fundamentally based on an allocation function that disaggregates the market price of a complex property into its constituent components. This disaggregation allows us to identify the contribution of each component to the overall price or rent. The allocation functions derived from each observation establish an allocation system, which facilitates the calculation of average prices for various property characteristics, ultimately enabling an assessment of the property's total value. This theoretical approach takes into account all characteristics of the property, quantifying the influence of each on the market price. However, the method is particularly effective in real estate markets characterized by homogeneity, especially in terms of size and structure (Simonotti, 2006). Consequently, the AS method is well-suited for real estate markets where assets are primarily defined by surface characteristics, such as polyculture land, which features a heterogeneous composition due to the different crops.

The established appraisal literature recognizes the AS method as a valid technique for valuing agricultural land; however, its practical application remains somewhat limited compared to other methodologies. To address this gap between theoretical acknowledgment and practical use, this study investigates the AS method within the context of land markets, focusing on its limitations and operational potential. Specifically, the analysis features a case study of polyculture land on Mount Etna's slopes. Through this example, the study systematically outlines the procedural steps necessary to determine the estimated value, examining each process phase—from data collection and analysis to the final value determination. This study also aims to investigate the benefits of selecting optimal comparable properties. In the appraisal process, choosing appropriate comparables is critical, as it underpins the accuracy and reliability of the valuation results. The study utilizes specific criteria to evaluate the quality of a sample of comparable properties, employing the «ideal point» method as its operational framework. This decision-making approach ranks alternatives based on their distance from a theoretical ideal point, which embodies the optimal solution according to all relevant criteria. Alternatives are assessed based on their proximity to this point, with preference given to those closest. In this context, the method ranks the comparable properties based on their adherence to the key comparison criteria: their similarity to the property under appraisal and the reliability of the sale prices. The ultimate goal is to demonstrate how an accurate selection process, based on a solid theoretical framework, can significantly enhance the precision of valuations, providing effective criteria for addressing issues arising from the heterogeneity and interpretive complexities inherent in the appraisal results generated by equations systems.

This paper is structured into four principal sections. The first section provides a comprehensive analysis of prevalent appraisal methods in the literature, specifically focusing on market-oriented approaches. It highlights both the outcomes achieved and the operational challenges and limitations associated with these methods, offering a clear overview of current issues in land valuation. The second section undertakes a rigorous theoretical examination of the

AS appraisal method, discussing its foundational principles. Furthermore, this section discusses measures of similarity and reliability, which are considered crucial parameters in the proposed methodology for identifying the optimal combination of comparables. The third section presents a detailed case study showcasing the application of the AS method for valuing agricultural land. The «ideal point» approach is utilized to determine the most appropriate estimated value from various combinations of comparables. The final section discusses the results of the analysis and experimentation, offering insights into the operational and theoretical implications of the work conducted.

2. Background

This paragraph, without claiming to be exhaustive given the breadth and complexity of the subject, aims to provide an overview of the market-oriented procedures applied in the literature to date.

Valuing agricultural land is inherently more complex than valuing urban real estate due to several factors. This complexity is essentially a result of a market characterized by limited transparency and low activity, which complicates the identification of a sufficient number of comparable properties. While significant strides have been made in the urban real estate sector to enhance our understanding of market dynamics and the factors that influence them, the knowledge base concerning agricultural land remains largely limited and fragmented (Tempesta, 2011). In this context, applying econometric methods to appraise the value of agricultural land from individual sale price observations presents practical challenges. These methods necessitate many observations to yield reliable results (Giannoccaro et al., 2016). In contrast, deterministic valuation methods—such as Monoparametric Appraisal, the Market Comparison Approach (MCA), the General Appraisal System (GAS), and the Allocation System (AS)—offer the advantage of functioning effectively even with smaller data samples (Simonotti, 1985; Salvo et al., 2021a). Additionally, these approaches reduce reliance on subjective expert judgment, a common issue in evaluating agricultural properties (Ciuna et al., 2015; Simonotti, 2003).

In Monoparametric Appraisal, a single parameter is the key distinguishing factor between the appraised property and the comparables. When there is only one distinguishing characteristic between the properties, the comparison can be made using a single technical parameter. However, when the properties differ in multiple aspects—a frequent scenario given the variety of characteristics in agricultural land (e.g., fertility, slope, etc.) and vegetation (e.g., tree species, variety, age, cultivation form, etc.)—an economic parameter that encompasses all the defining factors is required (Schimmenti et al., 2012). However, it is essential to note that economic parameters are not always easily identifiable or capable of fully capturing the combined effects of a property's characteristics on its value. Consequently, in practice, comparisons often rely on a single technical parameter, assuming it represents the distinguishing feature between the appraised property and the comparables (Schimmenti et al., 2012). This simplifying assumption, based on an assumed high degree of sample homogeneity, tends to reduce the sample size, frequently leading to unreliable assessments (Berloco et al., 1991).

In contrast to Monoparametric Appraisal, multivariable deterministic procedures offer the advantage of employing assessment functions that establish cause-effect relationships between multiple property characteristics and the market price while operating with limited data samples. Among these procedures, MCA remains underutilized in the valuation of agricultural properties (Agosta et al., 2023). One of the few contributions in this area is by Berloco (2012), who advocates its use to ensure accurate and robust valuations, even in a notoriously stagnant and opaque market. Berloco emphasizes the importance of carefully identifying the market segment to be analyzed, given the extreme complexity of agricultural land, and systematically collecting real estate data. The author also presents a case study where the mixed MCA-GAS method is applied to the valuation of agricultural land used for cereal and forage crops. References to MCA-GAS use in agricultural land assessment can also be found in the Real Estate Valuation Code (Tecnoborsa, 2018) and Simonotti (2011). The former mentions the mixed procedure in the broader context of

market-oriented approaches for agricultural land valuation, while the latter provides practical examples for educational purposes. In a recent study, Agosta et al. (2023) set the stage for a future application of MCA by identifying the most relevant property characteristics in land markets and suggesting appropriate economic criteria or procedures for evaluating their marginal prices. The deterministic multivariable AS method has much older roots and, in the Italian context, descends from Marenghi's typical value appraisal procedure. In 1941, Famularo proposed the application of AS in studies on the partitioning of agricultural land income among the different crops of a polyculture farm (Simonotti, 1990). This proposal became a historical reference in cadastral valuations, though subsequent applications of AS in the scientific literature have been sparse and limited to only a few studies. This study aims to bridge this gap by revisiting the application of AS to partition the market value of polyculture land. The goal is to demonstrate the utility and adaptability of AS in addressing today's challenges in land valuation.

3. Materials and methods

3.1. The allocation system

3.1.1. General aspects of the procedure

The allocation system is an appraisal method to allocate the market price or income among the characteristics identified in a property sales or lease sample. The allocation is typically linear and carried out using the average prices of these characteristics. This method is applied to appraise atypical and complex properties, mainly when using statistical models based on a single variable or direct (monoparametric) appraisal methods is not feasible due to the simplifications induced by using only one parameter. The general equation of the allocation system reflects the theoretical principle of typical value appraisal, which is based on breaking down a complex property into its constituent parts and appraising each part individually; the total estimated value of the property is then obtained by summing the values of each part.

The complementary value is the appraisal criterion by which the value of a part V_j (element, component, characteristic, etc.) of a complex property is obtained by subtracting the value of the remaining part V_{T-j} from the total value V_T , under the assumption of removing the part to be appraised, as follows (Eq. 1):

$$V_j = V_T - V_{T-j}. \quad (1)$$

The complementary value serves as the logical appraisal basis for the implicit marginal price of qualitative and quantitative characteristics of a property, as it expresses a variation in the total value with the removal (or addition) of a part. This proposition holds general value in the analysis of marginal prices. The marginal price, in turn, is the cornerstone of appraisals based on the observation and collection of market data. By extension, the marginal price of a property characteristic, as a complementary value, is given by the difference between the value of the property that possesses the characteristic and the value of the property that lacks it, assuming all other conditions are equal.

The AS breaks down the parts of a complex property T and assigns to each a unit average price $\bar{p}_{(.)}$. The general equation for the AS, according to the complementary criterion, is as follows (Eq. 2):

$$V_T = V_j + V_{T-j}. \quad (2)$$

By indicating the relative size of the parts with subscripts, the following relation (Eq. 3) is obtained by substituting into (2):

$$\bar{p}_T \cdot T = \bar{p}_j \cdot j + \bar{p}_{T-j} \cdot (T - j), \quad (3)$$

where \bar{p}_T is the average price of the complex property; T represents the total size of the complex

property; \bar{p}_i is the average price of the j -th portion of the complex property; j represents the size of the j -th portion; \bar{p}_{T-j} is the average price of the portion complementary to the j -th; and $T-j$ represents the size of the complementary portion.

The AS can be seen as a method of typical value appraisal based on each part's relative merit points in relation to a reference part. The merit point in the complementary appraisal criterion is expressed as (Eq. 4):

$$w = \frac{\bar{p}_j}{\bar{p}_{T-j}}; \quad (4)$$

substituting into (3), we get (Eq. 5):

$$V_T = w \cdot \bar{p}_{T-j} \cdot j + \bar{p}_{T-j} \cdot (T - j), \quad (5)$$

thus, once the unit price \bar{p}_{T-j} is known, it is possible to estimate the unit price \bar{p}_i by using the merit point w . If the unit of measurement for the parts of the complex property is uniform, the previous relationship can be simplified as follows (Eq. 6):

$$V_T = \bar{p}_{T-j} \cdot [(w - 1) \cdot j + T]. \quad (6)$$

Without market data, the total price (or income) can be divided using merit points.

Generally, the use of the AS aims at uniformity in property characteristics, aside from those related to surface area, and refers mainly to the size characteristics of properties. Thus, it is a method frequently employed in market contexts where the surface characteristics are predominant in determining the market value. Surface characteristics can be distinguished and classified into complex properties based on their use and type.

For a multi-purpose complex, the surface area can be divided into commercial, residential, etc. For an industrial plant, the surface area can be divided into offices, warehouses, outdoor areas, etc. Commercial property can be divided into a display area and a sales area. Polyculture agricultural land can be divided into tree crops, shrub and herbaceous crops, dry and irrigated areas, etc. In residential properties, the classification operates between the primary and secondary surface areas.

The main steps in the Allocation System appraisal procedure are as follows (Simonotti, 2006):

1. Market analysis to identify recent contracts for properties belonging to the same market segment as the property being appraised;
2. Collection of complete property data (zone layout, floor plans, photos, etc.);
3. Selection of uniform property characteristics;
4. Compilation of a data table;
5. Setup of the matrix and vectors for the allocation system;
6. Solving the system and calculating unit prices;
7. Appraisal of the property being evaluated and presentation of the results.

3.1.2. Analysis of average prices

The allocation system is based on the allocation function. It breaks down a property's market price or rent into the average unit prices or incomes to determine each characteristic's contribution to the overall market price or rent.

The allocation function, which considers the market price P as the sum of the products of each characteristic x_i (with $i = 1, 2, \dots, n$) and the corresponding average price, can be interpreted in two directions:

- The first allocates the total price among the various characteristics, with the average prices being unknown (Eq. 7):

$$P = x_1 \cdot \bar{p}_1 + x_2 \cdot \bar{p}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{p}_n \quad (7)$$

- The second combines the different characteristics into the total price, with the average prices being known (as in the case of an estimate or cost calculation, where quantities are multiplied by unit prices) (Eq. 8):

$$x_1 \cdot \bar{p}_1 + x_2 \cdot \bar{p}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{p}_n = P. \quad (8)$$

The allocation equation is written for each comparable property identified through market segment analysis. The allocation equations for each comparable result in a linear equation system, specifically an “allocation system,” in which the average unit prices are the unknowns, and the total prices are the known terms.

The system of equations can be written as follows (Famularo, 1957) (Eq. 9):

$$\begin{cases} P_1 = \sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \bar{p}_i \\ P_2 = \sum_{i=1}^n x_{2i} \cdot \bar{p}_i \\ \dots \\ P_m = \sum_{i=1}^n x_{mi} \cdot \bar{p}_i \end{cases} \quad (9)$$

Indicating with \bar{p}_i the vector of average prices. $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$ relative to the characteristics, with P_j the vector of market prices P_1, P_2, \dots, P_m , and with D_{ji} the matrix of coefficients, the system, in its determined form (when $m = n$), can be solved as follows (Eqs. 10-13):

$$\bar{p}_i = D_{ji}^{-1} \cdot P_j \quad (10)$$

where:

$$\bar{p}_i = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$D_{ji} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$P_j = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

If the system is overdetermined ($m > n$) or underdetermined ($m < n$), the solution can be obtained using the Moore-Penrose pseudoinverse (Simonotti, 2006).

Specifically:

- if $m > n$ (Eq. 14)

$$\bar{p}_i = (D_{ji}^T \cdot D_{ji})^{-1} \cdot D_{ji}^T \cdot P_j \quad (14)$$

- if $m < n$ (Eq. 15)

$$\bar{p}_i = D_{ji}^T \cdot (D_{ji}^T \cdot D_{ji})^{-1} \cdot P_j. \quad (15)$$

By considering in the elementary equation the characteristic x_{0i} (with $i = 1, 2, \dots, n$) of the property to be appraised and multiplying by the unit prices calculated by solving the allocation system, the estimated value of the property can be obtained as follows (Eq. 16):

$$V = x_{01} \cdot \bar{p}_1 + x_{02} \cdot \bar{p}_2 + \dots + x_{0n} \cdot \bar{p}_n. \quad (16)$$

3.2. The rationality measures

As is well known, the concept of comparison represents the fundamental method upon which the determination of the assessed value is based. In market-oriented valuation procedures, comparison strictly consists of the quantitative evaluation of qualitative differences between the property under assessment and the properties with known prices observed in the market. For comparison purposes, two fundamental conditions need to be considered:

- Availability of comparable properties similar to the property being appraised;
- Availability of reliable known prices for comparable properties, which are not derived from anomalous transactions.

The selection of properties with established prices is a vital step in ensuring the validity of the final assessment. Data collection for property valuation is often constrained by the spatial limitations inherent in real estate and the temporal fluctuations in market prices (Simonotti, 1985; Salvo et al., 2020). In the practice of appraisal, assessing a unique property frequently presents the challenge of creating a comparison set that adequately satisfies the fundamental criteria for comparison. This set may include properties only partially similar to the evaluated property, each with varying degrees of reliability regarding their sales prices.

Determining how well these properties meet the essential comparative standards is crucial to achieving an accurate and fair assessed value. The degree of similarity and reliability of the comparable properties can be measured using specific coefficients known as «rationality measures» (De Ruggiero & Salvo, 2011; De Ruggiero et al., 2020). These measures enhance the valuation process and help mitigate uncertainty in the outcome.

3.2.1. The degree of similarity

The degree of similarity between the property being appraised and a generic comparable can be evaluated using a measure known as the «similarity coefficient» (Ciuna et al., 2017). This measure assesses the closeness of the quantitative and qualitative characteristics gathered for the property in question to those of comparable properties with known prices. As the values of these characteristics converge for the property being evaluated and the comparables, the degree of similarity increases. Conversely, significant differences in these characteristic values indicate lower similarity (De Ruggiero & Salvo, 2011).

The degree of similarity of each comparable can be evaluated based on the difference between the value of the i -th characteristic of j -th comparable and that of the appraised property. This difference can be expressed either in absolute value or as the square of the standardized distances.

In terms of absolute value, the similarity coefficient c_{sim}^j of the generic comparable j can be defined as follows (Eq. 17):

$$c_{sim_a}^j = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{ij} - x_{i0}}{\bar{x}_i} \right| - \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{ij} - x_{i0}}{\bar{x}_i} \right|}{(m-1) \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{ij} - x_{i0}}{\bar{x}_i} \right|} \quad (17)$$

and in terms of the square of standardized distances, as follows (Eq. 18):

$$c_{sim_q}^j = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{ij} - x_{i0}}{\bar{x}_i} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{ij} - x_{i0}}{\bar{x}_i} \right)^2}{(m-1) \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{ij} - x_{i0}}{\bar{x}_i} \right)^2} \quad (18)$$

where x_{ij} is the amount of the i -th characteristic of j -th comparable; x_{i0} is the amount of the i -th characteristic of the property being appraised; \bar{x}_i is the average amount of the considered characteristic; m is the number of comparables; n is the number of characteristics.

3.2.2. The degree of reliability

The necessity of establishing the reliability of identified comparable properties stems from the occurrence of anomalous sales prices in the real estate market. Generally, a set of sales prices can be deemed free from anomalies if the following criteria are met:

- The sales prices are recorded within the same market segment as the property being evaluated.
- The sales prices are recent and adhere to the definition of market value.
- The sales prices are obtained using a consistent methodology and sourced from common and comparable listings.

The reliability of these comparable properties can be quantified using an indicator known as the «reliability coefficient» (De Ruggiero & Salvo, 2011). Each comparable property's reliability is assessed based on its price per area unit. This indicator assesses the «proximity» between the unit price of an individual comparable and the average unit price of all sampled properties.

The reliability coefficient c_{rel}^j of the generic comparable j is calculated as follows (Eq. 19):

$$c_{rel}^j = \frac{\left(1 - \left| \frac{p_j - \bar{p}}{\bar{p}} \right| \right)^{m+1}}{\sum_{j=1}^m \left(1 - \left| \frac{p_j - \bar{p}}{\bar{p}} \right| \right)^{m+1}} \quad (19)$$

where p_j is the price per area unit of the j -th comparable; \bar{p} is the average price per area unit of the m comparables; m is the number of comparables.

3.2.3. The composite coefficient

The degree of similarity highlights the correspondence between the comparable and property under assessment. In contrast, the degree of reliability allows for verifying anomalous sales prices within the examined sample. The degree of similarity and reliability can be considered the two fundamental criteria for evaluating properties with known prices for their use in the valuation analysis (Simonotti et al., 2016; Tajani et al., 2020). To simultaneously consider both criteria, it is necessary to introduce a composite measure obtained from the combination of the similarity and reliability coefficients. This measure is the «composite coefficient» (De Ruggiero & Salvo, 2011).

The composite coefficient c_{com}^j of the generic comparable j can be expressed as follows:

- If the similarity coefficient is expressed in terms of absolute value (Eq. 20):

$$c_{com_a}^j = \frac{c_{sim_a}^j \cdot c_{rel}^j}{\sum_{j=1}^m c_{sim_a}^j \cdot c_{rel}^j} \quad (20)$$

- If the similarity coefficient is expressed in terms of the square of standardized distances (Eq. 21):

$$c_{com_q}^j = \frac{c_{sim_q}^j \cdot c_{rel}^j}{\sum_{j=1}^m c_{sim_q}^j \cdot c_{rel}^j} \quad (21)$$

where $c_{com_a}^j$ and $c_{com_q}^j$ are values of the composite coefficients for the j -th comparable; $c_{sim_a}^j$ and $c_{sim_q}^j$ are the values of the similarity coefficients for j -th comparable; c_{rel}^j is the reliability coefficient of the j -th comparable; m is the number of comparables.

3.2.4. Application of the ideal point method for selecting the best combination of comparables: rationality measures for the validation of the estimation sample

The similarity, reliability, and composite coefficients may be applied in the preliminary stages of market-oriented valuation procedures. The primary objective is to identify the most appropriate input data for the selected method. Given that appraisal judgments are significantly influenced by the selection of comparable properties, the critical conditions for comparison depend on the similarity to the property under evaluation and the reliability of market prices. Consequently, measures of similarity and reliability can serve as effective criteria for validating the inclusion of each comparable in the valuation analysis. These criteria facilitate the identification of a property's «best combination of comparables,» defined as the set of properties that results in the most accurate assessed value (Simonotti, 1987).

Assuming that the available comparable properties exhibit varying levels of similarity to the appraised property and that their sale prices possess differing degrees of reliability, it becomes feasible to classify identified comparables based on these two dimensions. This classification not only ranks comparables according to objective criteria of affinity and data certainty but also enables the selection of the most suitable appraisal sample for the valuation process. In this context, the term «best» is understood in a technical sense, referring to the appraisal sample that, among various possibilities, best aligns with the fundamental conditions for comparison, thereby ensuring the most appropriate and reliable appraisal. This method enhances the quality of appraisal judgments and reinforces their reliability through a meticulously considered and methodologically sound choice of reference sample.

The composite coefficient aims to synthesize the two fundamental dimensions—validity of comparable properties—into a single measure, which can be employed to rank comparables in the valuation process. This index establishes a hierarchy among the comparables to identify the most favorable balance between similarity and data reliability. However, the multiplicative structure of the composite coefficient presupposes that the two measures—similarity and reliability—are mutually compensable, suggesting that a deficit in one aspect can be offset by excellence in the other. This assumption may conflict with the practical complexities of the valuation process. A high composite coefficient does not ensure the overall suitability of a comparable; it may arise from a combination of low similarity compensated by high reliability or vice versa. Therefore, utilizing composite coefficients for ranking implies treating the two dimensions interchangeably, which may not always hold conceptually. Significant dissimilarity compared to the property being appraised cannot be compensated solely by the reliability of the sale price. Similarly, a comparable with an unreliable price might still be useful if its characteristics are particularly similar to those of the property being evaluated. Thus, the composite coefficient potentially obscures the nuanced relationship between similarity and reliability, masking the valuation process's intrinsic complexity.

An intriguing alternative to the use of composite coefficients for classifying comparables is the methodological approach of the «ideal point,» originally introduced by Coombs in the 1950s

(Coombs, 1950) and subsequently refined by Shepard (Shepard et al., 1975) and Milan Zeleny (1982). This model, grounded in multi-criteria analysis, addresses problem-solving by initially identifying efficient (non-dominated) alternatives—options for which no feasible alternative can improve one criterion without compromising others. The ideal point is a reference against which alternatives may be assessed (Voodg, 1983). In «ideal decision theory» (Zeleny, 1982; Yu, 1973), the ideal point is represented by a vector comprising the maximum values each attribute or criterion can achieve among various alternatives. In 1973, Zeleny proposed the «axiom of choice,» stating that alternatives closer to the ideal point are preferred over those more distant ones (Zeleny, 1973). Thus, greater proximity to the perceived ideal becomes the criterion by which individuals make their choices, circumventing the challenge of precisely quantifying the utility derived from each option.

Given alternatives ($k = 1, \dots, m$) and criteria ($w = 1, \dots, s$), the space of alternatives can be expressed in matrix form as (Eq. 22):

$$Y = \{y_w^k\}, \quad (22)$$

where y_w^k is the value achieved by the w -th criterion for the k -th alternative. The ideal point is then defined by the following vector (Eq. 23):

$$y^* = \max_k \{y_w^k\} = \{y_w^*\}. \quad (23)$$

To determine the proximity of any alternative y^k to the ideal, y^* , in terms of distance d^k , an appropriate family of distance functions can be defined (Eq. 24):

$$L_p(\lambda, k) = \left[\sum_{w=1}^s (\lambda_w)^p (1 - d_w^k)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (24)$$

where $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ (with $\sum \lambda_w = 1$) is a vector of weights assigned to the various criteria, and p ($1 \leq p \leq \infty$) represents the characteristic parameter of the family of distance functions (Romano, 2002).

Notable cases of equation (24) arise for specific values of p , in the following manner:

- for $p = 1$ – Manhattan distance (Eq. 25):

$$L_1(\lambda, k) = \sum_{w=1}^s \lambda_w (1 - d_w^k) \quad (25)$$

- for $p = 2$ – Euclidean distance (Eq. 26):

$$L_2(\lambda, k) = \left[\sum_{w=1}^s (\lambda_w)^2 (1 - d_w^k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

- for $p = \infty$ – Chebyshev distance (Eq. 27):

$$L_\infty(\lambda, k) = \max_w \{\lambda_w (1 - d_w^k)\}. \quad (27)$$

By varying the parameter p , we can derive different solutions for calculating distance. The collection of solutions, with p ranging from 1 to ∞ , is known as the «compromise set.»

This parameter p is closely linked to the concept of «compensatoriness.» Methods based on Euclidean and Manhattan distances are deemed compensatory, as a low score in one criterion can be counterbalanced by a higher score in another. In contrast, the Chebyshev distance method is considered non-compensatory; a low score in any criterion directly influences the final decision without being mitigated by more robust performance in other areas. When $p = 1$, we obtain additive linear utility functions, that exhibit total compensation, allowing for complete attribute trade-offs. As the value of p increases, the degree of compensation gradually diminishes, ultimately reaching zero compensation at $p = \infty$. At this stage, the decision relies exclusively on the

performance of each attribute, resulting in the utmost competition among alternatives and eliminating trade-offs.

To better understand how the ideal point method facilitates the classification and selection of the best combination of comparables, Table 1 illustrates the various components of the method, emphasizing the specific role each plays within this context.

Table 1. Components of the ideal point method and the problem of selecting the best combination of comparables

Components of the ideal point method	Components of the problem of selecting the best combination of comparables
Alternatives	Identified comparables
Criteria	Measures of similarity and reliability
Weights	Importance assigned to similarity and reliability measures in the appraisal process
Ideal Points	Maximum achievable values for similarity and reliability measures

Regarding the assignment of weights, it is reasonable to attribute equal importance to both measures, as each constitutes a fundamental condition for the proper conduct of the appraisal process.

Regarding the determination of ideal points, analyzing formulas (17), (18), and (19) shows that:

- Similarity coefficients can take values within the range $0 \leq c_{sim}^j < \frac{1}{m-1}$ if a comparable is the only one not similar to the property being appraised; $\frac{1}{m-1}$ if the comparable is identical to the property being appraised);
- Reliability coefficients can take values within the range $0 \leq c_{rel}^j \leq \frac{1}{m}$ (0 if the unit price of the generic comparable deviates significantly from the average unit price of the sample; $\frac{1}{m}$ if the unit price matches the average unit price of the sample).
- The maximum values or «ideal points» for the considered measures are thus as follows (Eqs. 28 and 29):

$$y_{sim}^* = \frac{1}{m-1} \quad (28)$$

$$y_{rel}^* = \frac{1}{m} \quad (29)$$

where y_{sim}^* represents the ideal point associated with the similarity measure; y_{rel}^* represents the ideal point associated with the reliability measure; m represents the number of comparables analyzed.

The optimal combination of comparable sales selection procedure can be summarized in the following steps:

1. Calculation of similarity and reliability coefficients.
2. Identification of the ideal points associated with each criterion.
3. Calculation of the distances between the coefficients and the ideal points.
4. Application of the distance function $L_p(\lambda, k)$.
5. Ranking of comparable sales.
6. Selection of comparable sales to be used in the valuation process.

The integration of similarity and reliability measures, grounded in the principles of the ideal point method, enhances transparency and rigor in selecting comparable properties. This establishes a clear and structured methodology for identifying comparables. Such an approach is invaluable for appraisers during the initial phases of valuation analysis, particularly when defining the sample, as it significantly bolsters the consistency and reliability of the overall evaluation process.

4. Case study

4.1. Description of the property under valuation

The agricultural land being appraised is located on Mount Etna's western slope, in the Bronte municipality (Sicily, Southern Italy), an area predominantly characterized by pistachio cultivation. The subject property covers approximately 6 hectares and borders other properties and the SP211, a road providing easy land access. The somewhat irregular morphology is a distinctive feature of these areas, with occasional outcropping rocks representing the typical substrate for pistachio cultivation (volcanic origin). The soil's good content of «allophane» gives it specific fertility factors (classified as «andic» soil). The area experiences a humid mesothermal and subtropical microclimate, with dry summers and rainfall during the autumn-winter period (Mediterranean climate). The water service provided by the local aqueduct company ensures the availability of irrigation water.

There are several buildings on the property. One was recently built and serves as a storage facility for agricultural tools and equipment. The other buildings occupy a total area of about 200 square meters. These older buildings feature the rural architecture typical of the Etna region. Still, they are in a very poor state of preservation, making them practically unusable and needing proper restoration. Additionally, the land is crisscrossed by farm roads that improve accessibility.

The land is primarily cultivated with pistachio orchards arranged in an irregular pattern. The predominant cultivation method is stump training, featuring almost exclusively the *Pistacia vera* cultivar (also known as «Napoletana») grafted onto *Pistacia terebinthus*, a variety known for its high productivity, vigorous growth, dehiscent endocarp, and high seed yield. In addition to the pistachio orchard, the land is used for arable farming and vineyards (wine grapes) in areas with more regular soil morphology. Table 2 summarizes the surface areas for the three types of cultivation on the property.

Table 2. Real estate data of the subject property

Characteristics	Subject
Pistachio orchards area (sqm)	38,268.00
Vineyard area (sqm)	1,678.00
Irrigated arable land area (sqm)	15,993.00

4.2. Market survey

4.2.1. The appraisal sample

The sample collected consists of 6 agricultural land sales that took place during the four years 2017-2020 on the slopes of Mount Etna. Each sampled unit's surface characteristics are assessed by combining cadastral data with map measurements. The sampled units are in the same area as the property under assessment, thus ensuring the homogeneity of external characteristics. Other intrinsic characteristics, which are generally relevant for valuation purposes, such as fertility, altitude, topography, slope, and similar factors, should be considered *ceteris paribus*.

Pistachio orchards are the predominant crop in all the surveyed lands; vineyards and portions of land are used for irrigated arable crops. Since these are mixed-crop agricultural lands, the areas

covered by the different types of cultivation are taken as explanatory variables of the price.

The real estate data collected for each sampled unit are as follows:

- Sale price (PRICE), expressed in euros (€);
- Pistachio grove area (PIa), expressed in square meters (sqm);
- Vineyard area (VIa), expressed in square meters (sqm).
- Irrigated arable land area (IRa), expressed in square meters (sqm).

Tables 3 and 4 summarize the amounts of the collected data and the main descriptive statistics.

Table 3. Real estate data of the valuation sample – Data table

Comparable	PRICE (€)	PIa (sqm)	VIa (sqm)	IRa (sqm)
A	45,000.00	23,890.00	0.00	0.00
B	178,000.00	56,867.00	11,658.00	0.00
C	154,000.00	37,421.00	42,809.00	0.00
D	74,000.00	30,456.00	0.00	8,754.00
E	42,000.00	12,469.00	5,689.00	3,421.00
F	30,000.00	10,488.00	3,895.00	0.00
Subject	-	38,268.00	1,678.00	15,993.00

Table 4. Descriptive statistics of the appraisal sample

Index	PRICE (€)	PIa (sqm)	VIa (sqm)	IRa (sqm)
Minimum	30,000.00	10,488.00	0.00	0.00
Maximum	178,000.00	56,867.00	42,809.00	8,754.00
Mean	87,166.66	28,598.50	10,675.16	2,029.16
Median	59,500.00	27,173.00	4,792.00	0.00
Standard deviation	63,208.91	17,266.82	16,323.60	3,567.37

4.3. Application of the AS appraisal procedure and selection of the best combination of comparables

After completing the steps of the procedure described in Section 3.1, which involve data collection and selection of characteristics, and once the data table (Table 2) has been compiled, the allocation system is resolved.

The allocation system for the case in question is presented in the following form:

$$\begin{cases} 45,000.00 = 23,890.00 \cdot \bar{p}_{PIa} + 0.00 \cdot \bar{p}_{VIa} + 0.00 \cdot \bar{p}_{IRa} \\ 178,000.00 = 56,867.00 \cdot \bar{p}_{PIa} + 11,658.00 \cdot \bar{p}_{VIa} + 0.00 \cdot \bar{p}_{IRa} \\ 154,000.00 = 37,421.00 \cdot \bar{p}_{PIa} + 42,809.00 \cdot \bar{p}_{VIa} + 0.00 \cdot \bar{p}_{IRa} \\ 74,000.00 = 30,456.00 \cdot \bar{p}_{PIa} + 0.00 \cdot \bar{p}_{VIa} + 8,754.00 \cdot \bar{p}_{IRa} \\ 42,000.00 = 12,469.00 \cdot \bar{p}_{PIa} + 5,689.00 \cdot \bar{p}_{VIa} + 3,421.00 \cdot \bar{p}_{IRa} \\ 30,000.00 = 10,488.00 \cdot \bar{p}_{PIa} + 3,895.00 \cdot \bar{p}_{VIa} + 0.00 \cdot \bar{p}_{IRa} \end{cases}$$

where each equation corresponds to a comparable property and serves as a foundation for assessing the property under consideration.

After identifying six comparables and selecting three characteristics as parameters for comparison, the coefficient matrix D_{ji} , derived from the data table, assumes a rectangular configuration of dimensions 6×3 . In this scenario, the system of linear equations becomes overdetermined, indicating that the number of equations exceeds the number of unknowns ($m > n$). Consequently, the solution can be determined using the Moore-Penrose pseudo-inverse matrix (refer to Equation 14). Specifically, the vector of average prices \bar{p}_i , the vector of market prices P_j , and the coefficient matrix D_{ji} are structured as follows:

$$\bar{p}_i = \begin{bmatrix} \bar{p}_{PIa} \\ \bar{p}_{Vla} \\ \bar{p}_{IRa} \end{bmatrix}$$

$$P_j = \begin{bmatrix} 45,000.00 \\ 178,000.00 \\ 154,000.00 \\ 74,000.00 \\ 42,000.00 \\ 30,000.00 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{A.} \\ \text{B.} \\ \text{C.} \\ \text{D.} \\ \text{E.} \\ \text{F.} \end{matrix}$$

$$D_{ji} = \begin{bmatrix} 23,890.00 & 0.00 & 0.00 \\ 56,867.00 & 11,658.00 & 0.00 \\ 37,421.00 & 42,809.00 & 0.00 \\ 30,456.00 & 0.00 & 8,754.00 \\ 12,469.00 & 5,689.00 & 3,421.00 \\ 10,488.00 & 3,895.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{A.} \\ \text{B.} \\ \text{C.} \\ \text{D.} \\ \text{E.} \\ \text{F.} \end{matrix}$$

The Moore-Penrose pseudo-inverse technique offers a method to derive a solution for systems with more observations than unknowns by minimizing algebraic error. However, it's crucial to recognize that the resulting solution is purely algebraic and may lack significance when estimating the various unknowns. In this specific instance, solving the system yields the following appraisal vector:

$$\bar{p}_i = \begin{bmatrix} 2.67 \\ 1.33 \\ -0.69 \end{bmatrix}$$

In this analysis, the unit values for different types of land are as follows: € 2.67 per square meter for pistachio orchards, € 1.33 per square meter for vineyards, and -€ 0.69 per square meter for irrigated arable land. The negative value assigned to irrigated arable land is particularly troubling, as it contradicts the general expectation that this characteristic typically enhances the asset's overall value.

Despite the inherent variability in valuation, it remains possible to derive a valuation solution for the allocation system under consideration. Each equation in this system can be viewed as a comparative evaluation (Simonotti, 1985), with each comparison representing a potential value. With this framework in mind, we can transform the initially overdetermined system—comprising six equations and three unknowns—into multiple determined subsystems (where the number of equations equals the number of unknowns) by systematically eliminating three equations at a time from the original set.

In this case, beginning with six comparables allows for creating twenty distinct subsystems, each formed by a unique combination of three comparables. By solving these twenty subsystems, assuming an algebraic solution exists, we can derive an equal number of estimated values, each consistent with the respective systems from which they originate.

The assessed values for the various subsystems configured in this case are summarized in the following table:

Table 5. Appraisal vectors for each subsystem

Subsystem	Comparable combination	Results (€/sqm)
1°	A-B-C	Impossible system
2°	A-B-D	PIa = 1.88; VIa = 6.08; IRa = 1.90
3°	A-B-E	PIa = 1.88; VIa = 6.08; IRa = -4.70
4°	A-B-F	Impossible system
5°	A-C-D	PIa = 1.88; VIa = 1.95; IRa = 1.90
6°	A-C-E	PIa = 1.88; VIa = 1.95; IRa = 2.17
7°	A-C-F	Impossible system
8°	A-D-E	PIa = 1.88; VIa = 2.11; IRa = 1.90
9°	A-D-F	PIa = 1.88; VIa = 2.63; IRa = 1.90
10°	A-E-F	PIa = 1.88; VIa = 2.63; IRa = 1.04
11°	B-C-D	PIa = 1.92; VIa = 1.05; IRa = -1.69
12°	B-C-E	PIa = 2.92; VIa = 1.05; IRa = -0.09
13°	B-C-F	Impossible system
14°	B-D-E	PIa = 2.71; VIa = 2.03; IRa = -0.99
15°	B-D-F	PIa = 3.46; VIa = -1.62; IRa = -3.59
16°	B-E-F	PIa = 3.46; VIa = -1.62; IRa = 2.35
17°	C-D-E	PIa = 1.68; VIa = 2.13; IRa = 2.62
18°	C-D-F	PIa = 1.76; VIa = 1.62; IRa = 0.60
19°	C-E-F	PIa = 2.26; VIa = 1.66; IRa = 1.35
20°	D-E-F	PIa = 2.08; VIa = 2.09; IRa = 1.20

By excluding subsystems that do not yield admissible solutions from an algebraic perspective (i.e., impossible systems) or a valuation perspective (due to inconsistencies in the sign of the assessed value), we can observe that the range of assessed values derived from various combinations of comparables reflects an ordinary reality in appraisal practice. Different experts frequently arrive at non-unique valuation judgments for the same property. This divergence occurs because each expert conducts a market analysis that develops distinct appraisal samples. Given that multiple data matrices with diverse combinations of comparables can be presented, it is reasonable to anticipate a corresponding number of different assessments.

Based on the equiprobability hypothesis in comparisons, each market observation is treated as a random variable. This implies that there is no basis for believing that one comparison is more likely than another; therefore, they are all equally probable, while appraisal results may differ.

However, it is crucial to recognize that in appraisal processes, the creation of the comparables set begins with the subject property. During this phase, relevant characteristics are defined, along with the units of measurement for each characteristic and their respective modalities. Based on these defined characteristics, comparable properties are identified to form the comparison set, and the sale prices of these properties are recorded.

Given the unique nature of real estate, it is reasonable to assume that the comparison set comprises properties that share varying degrees of similarity with the subject property, and their sale prices may also vary in reliability. When significant anomalies exist within the appraisal sample—stemming from either similarity in characteristics or discrepancies in price reliability—it can undermine the equiprobability hypothesis among comparisons. This suggests the presence of a subsystem formed by a specific combination of comparables, which can lead to the most accurate assessed value.

To determine the best combination of comparables from the various comparison subsystems derived from the initial system (which includes six comparables and three unknowns), we analyze

the comparable properties using a procedure based on the ideal point methodological approach, as described in Paragraph 3.2.4.

STEP 1 – Calculation of similarity and reliability coefficients: The similarity and reliability coefficients are computed using Equations (17) and (19), respectively. Table 6 summarizes the values assigned to the similarity and reliability coefficients for each comparable in the examined appraisal sample.

Table 6. Similarity and reliability coefficients for each comparable sale

Comparable	Similarity coefficient	Reliability coefficient
A	0.180764	0.159733
B	0.191739	0.033843
C	0.158820	0.182267
D	0.101948	0.161907
E	0.184584	0.200884
F	0.182143	0.261365

STEP 2 – Identification of the ideal points: Using Equations (28) and (29), the ideal points corresponding to the criteria of «similarity» and «reliability» are identified, respectively:

$$c_{sim}^* = \frac{1}{m-1} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$c_{rel}^* = \frac{1}{m} = \frac{1}{6} = 0.166666667.$$

STEP 3 – Calculation of distances to the ideal points: The distances $d_{sim}^{sim_j}$ and $d_{rel}^{rel_j}$ are calculated between the similarity coefficients c_{sim}^j and the reliability coefficients c_{rel}^j and their respective ideal points, c_{sim}^* and c_{rel}^* ; these distances are to be understood as the absolute difference between the two values.

The similarity and reliability measures operate within different ranges: one spans from 0 to 0.2, while the other extends from 0 to 0.166666667. Therefore, it is crucial to normalize these measures to prevent bias caused by their disparities. Without this adjustment, the measure with the broader range could unduly influence the overall result. To ensure a fair contribution from each variable, we implemented min-max normalization, scaling all values to a range between 0 and 1.

Table 7 summarizes, for each comparable in the analyzed appraisal sample, of the calculated distances between the normalized values of similarity and reliability and their corresponding ideal points. This representation allows for a precise evaluation of the degree of deviation of each comparable from the defined optimal values.

Table 7. Distances between the similarity and reliability coefficients and their respective ideal points

Comparable	Criteria	
	Similarity: $d_{sim}^{sim_j}$	Reliability: $d_{rel}^{rel_j}$
A	0.677771	0.386643
B	0.8	0.166666
C	0.433379	0.485683
D	0.2	0.396196
E	0.720308	0.567510
F	0.693121	0.833333

STEP 4 — Application of distance functions: Once the distances d_j^{sim} and d_j^{rel} are determined, the distance function $L_p(\lambda, k)$, expressed by Equation (24), is applied to consider various degrees of compensation between the similarity and reliability criteria. Three cases are analyzed: for $p = 1$, $p = 2$, and $p = \infty$. No preference judgment is expressed for any criterion, thus assigning equal weights.

Table 8 presents the distance function values for the three analyzed cases.

Table 8. Values of the distance function for different degrees of compensation

Comparable	Distance functions L_p		
	for $p = 1$	for $p = 2$	for $p = \infty$
A	0.467792788	0.346423888	0.306678478
B	0.516666667	0.428498671	0.416666667
C	0.540468601	0.382616151	0.283310312
D	0.701902041	0.501143534	0.4
E	0.356090826	0.257524182	0.216244668
F	0.236772686	0.17460836	0.153439353

STEP 5 — Ranking of comparable sales: The ranking of comparable sales is based on their respective distance function values. The comparable with the lowest value is considered the most suitable, while the one with the highest value is the least suitable. Table 9 presents the ranking of comparable sales for the three compensation levels under evaluation.

Table 9. Ranking of comparable sales for different compensation levels

Ranking	Comparable		
	for $p = 1$	for $p = 2$	for $p = \infty$
1°	F	F	F
2°	E	E	E
3°	A	A	C
4°	B	C	A
5°	C	B	D
6°	D	D	B

The results show that the ranking of comparables remains stable across different values of p , with some exceptions. In particular, comparable F consistently ranks closest to the ideal point in every scenario, followed by comparable E, and finally comparable A in two out of three scenarios. In the scenario with no compensation ($p = \infty$), the third position is occupied by comparable C. This change indicates that, with no compensation, the model is more sensitive to extreme differences in the measures, making the ranking less like the other scenarios. The non-compensatory distance used with $p = \infty$ emphasizes the influence of a single criterion, resulting in a ranking that differs more significantly from those obtained when both measures are balanced. However, the ranking for $p = \infty$ is not preferable for the application in question because, referencing a non-compensatory distance, it does not consider both criteria when ordering the alternatives. In the scenarios with $p = 1$ and $p = 2$, an inversion of positions between comparables B and C is observed. Still, the overall stability demonstrated reinforces the validity of the methodology used, showing that the model is resistant to variations in the balancing of measures and reduces the risk of one of the two (similarity or reliability) excessively dominating the appraisal process.

STEP 6 — Selection of comparable sales to be used in the valuation process: Once the comparables are ranked based on their distance from the ideal point, the optimal combination is formed by selecting those with the smallest distances, thus occupying the highest positions. The ideal number of comparables may vary depending on the specific requirements of the adopted appraisal model. Considering the presence of three unknowns, the optimal appraisal sample will consist of the three comparables closest to the ideal point to solve a determined system of equations.

In this case, properties A, E, and F represent the optimal set of comparables. The corresponding allocation subsystem for the optimal set is as follows:

$$\begin{cases} 45,000.00 = 23,890.00 \cdot \bar{p}_{PIa} + 0.00 \cdot \bar{p}_{Vla} + 0.00 \cdot \bar{p}_{IRa} \\ 42,000.00 = 12,469.00 \cdot \bar{p}_{PIa} + 5,689.00 \cdot \bar{p}_{Vla} + 3,421.00 \cdot \bar{p}_{IRa} \\ 30,000.00 = 10,488.00 \cdot \bar{p}_{PIa} + 3,895.00 \cdot \bar{p}_{Vla} + 0.00 \cdot \bar{p}_{IRa} \end{cases}$$

The linear equation system obtained by selecting the best combination of comparables is determined ($m = n$), and the corresponding vectors of average prices \bar{p}_i , market prices P_j , and the coefficient matrix D_{ji} are as follows:

$$\bar{p}_i = \begin{bmatrix} \bar{p}_{PIa} \\ \bar{p}_{Vla} \\ \bar{p}_{IRa} \end{bmatrix}$$

$$P_j = \begin{bmatrix} 45,000.00 \\ 42,000.00 \\ 30,000.00 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{A.} \\ \text{E.} \\ \text{F.} \end{matrix}$$

$$D_{ji} = \begin{bmatrix} 23,890.00 & 0.00 & 0.00 \\ 12,469.00 & 5,689.00 & 3,421.00 \\ 10,488.00 & 3,895.00 & 0.00 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{A.} \\ \text{E.} \\ \text{F.} \end{matrix}$$

Solving the system results in the following appraisal vector:

$$\bar{p}_i = \begin{bmatrix} 1.88 \\ 2.63 \\ 1.04 \end{bmatrix}$$

In this analysis, the unit values for different types of land are as follows: €1.88 per square meter for pistachio orchards, €2.63 per square meter for vineyards, and €1.04 per square meter for irrigated arable land. This valuation is acceptable, as it maintains consistency in both the sign and the magnitude of the assessed values.

Based on the principles that informed the selection of equations, which sought to fulfill the essential conditions of comparison—specifically, the similarity between properties comparable and the one being under assessment and the reliability of the known prices for those properties—it can be concluded that the resulting assessed value is the most accurate.

After deriving the unit prices of the characteristics contributing to the total price, the market value V of the mixed-crop land being appraised is calculated by applying Equation (10) as follows:

$$V = 38,268.00 \text{ mq} \cdot 1.88 \frac{\text{€}}{\text{mq}} + 1,678.00 \text{ mq} \cdot 2.63 \frac{\text{€}}{\text{mq}} + 15,993.00 \text{ mq} \cdot 1.04 \frac{\text{€}}{\text{mq}} = 92,989.70 \text{ €}$$

It is concluded that the assessed value of the land is 92,989.70 euros.

5. Discussion and Conclusions

The valuation analysis, which often operates with small samples, consisting of a few sales data, is inevitably influenced by spatial and temporal limitations in data collection and the atypical and complex nature of real estate properties. In many cases, the sample size for appraisal is so

small that conventional statistical techniques cannot be applied to determine the assessed values (Simonotti, 1994; Benvenuti et al., 2023). This issue is particularly critical in the valuation of agricultural land due to low transparency and limited activity defining land markets. Nevertheless, the appraisal of land assets remains crucial in various fields, as it provides the basis for determining fair values in real estate transactions, granting bank guarantees, land-use planning, and calculating compensation and damages (Del Giudice et al., 2024; Salvo et al., 2021c). A fair and reliable valuation of such assets becomes indispensable in this context. Faced with limited and fragmented knowledge, a potential solution emerges from using valuation systems that allow for operations even with fewer comparable properties.

Among the mathematical models based on valuation systems, the Allocation System (AS), which employs functions to decompose the observed price of a complex property into the average implicit prices of its main components, is well suited for the appraisal of mixed-crop lands. Applying the AS appraisal process involves the identification of comparable properties, each described by an allocation equation. The set of these equations forms a system of linear equations known as the «allocation system,» where the average unit prices of the characteristics are the unknowns, while the total prices are the known terms.

Identifying a sample of more comparables than is strictly necessary for solving a determined system allows access to multiple appraisal samples, each leading to a value, provided that the associated system of equations has a solution. In such a framework, the question arises as to which sample, and thus which assessed value, should be preferred. This issue translates into a delicate problem of selecting the comparables. Although the Real Estate Valuation Code and the Guidelines for the Valuation of Properties as Credit Collateral formally acknowledge the validity of mathematical models based on valuation systems as applicable procedures in appraisal practices, they do not explicitly indicate a rigorous procedure for selecting comparables (Casini et al., 2023). Without a procedure guiding the professional in choosing the appraisal sample, a possible procedural approach could consist of applying the AS method to all possible combinations of similar properties, each composed of many elements equal to the number of unknowns considered. The main problem with this approach is that the assessed results, i.e., the average prices of the characteristics considered, obtained from applying each combination of comparables, may be highly heterogeneous and, in some cases, challenging to interpret and justify from a valuation perspective. Such heterogeneity in assessed average prices inevitably translates into similar heterogeneity in the property values to be appraised.

In the case study presented in this work, the analysis began by identifying numerous comparables, outnumbering the explanatory characteristics. After testing the application of an overdetermined system, which resulted in a solution that was not acceptable from a valuation perspective, twenty different combinations of comparables were analyzed in groups of three. Some of the combinations considered resulted in unfeasible solutions or impossible systems, which aligns with the nature of valuation models based on algebraic systems. Only ten yielded feasible solutions among the examined combinations, resulting in probable assessed values. The assessed results, although different, are all equally probable based on the hypothesis of equiprobability of comparisons. However, the question arises regarding which appraisal result can be considered the fairest and most representative of the market reality. An answer to this question could be based on a profound reflection on the fundamental principles of the comparative process.

Relying on the fundamental conditions governing comparison, namely the similarity between comparable properties and the reliability of the observed prices, it can reasonably be assumed that the combination of comparables exhibiting the highest degrees of similarity and reliability can generate the fairest assessed value. Indeed, the closer the comparable properties are to the property being appraised and the more reliable the market data used, the more the resulting value can be considered consistent with the actual market dynamics of the reference context. The use of rationality measures, capable of quantifying the similarity and reliability of each comparable property, allows the adoption of objective and rigorous criteria for evaluating comparable properties for use in the valuation analysis. This evaluation can be accomplished through the «ideal point» methodological approach, which measures how much the levels of similarity and

reliability of each comparable deviate from their ideal values, i.e., the maximum values that these parameters can reach, allowing for the ranking of properties based on the magnitude of these distances. Based on this ranking, the «best combination of comparables» can be identified, with its size varying according to the specific needs of the adopted model; from the best combination, the most appropriate assessed value is derived.

Adopting a structured procedure for selecting the best combination of comparables carries significant implications. First and foremost, it effectively responds to the problem of heterogeneity and discrepancies in the appraisal results, which often arise when the number of identified comparables exceeds the number of unknowns in the system. In this regard, the procedure stands out for its intrinsic advantage, allowing the avoidance of solving the system for each possible combination. This approach offers a significant computational benefit and relieves the appraiser from choosing between equiprobable appraisal solutions, which are often challenging to compare intuitively. Moreover, formalizing such a procedure represents a solution to the disputes that frequently arise in valuation practice. It is not uncommon for different appraisers, called to assess the same property, to reach divergent conclusions. Such divergence is easily attributable to different appraisal samples, thus raising the legitimate question of which assessed values reflect the market dynamics more accurately. A possible answer to this need for discernment among various assessments lies in using similarity and reliability measures, tools that, by evaluating comparables based on the fundamental principles of the comparative process, guide the choice towards the most representative and consistent value with market conditions.

In examining the case study, a final clarification is necessary. Although the identified best combination of comparables led to an acceptable assessed value, both mathematically and in appraisal terms, it cannot be ruled out, in a broader sense, that among the various possible combinations, there may be groups that do not yield feasible solutions. In such a circumstance, if the best combination were to generate an impossible system or an incongruent assessed value, the following combination would be selected following the established ranking for comparable properties. If this further combination were inadequate, the procedure would be repeated until a combination satisfying the feasibility criteria is found.

In conclusion, this study has highlighted how the Allocation System (AS) represents a valid tool for appraising mixed-crop agricultural lands, particularly in contexts where market data availability is limited. Based on a solid theoretical framework, the analysis also demonstrated how adopting rationality measures, such as similarity and reliability coefficients, can provide effective evaluation parameters to address issues related to the heterogeneity and interpretive difficulties associated with appraisal results arising from systems of equations. This contribution bridges the gap between theory and practice in land valuation. It proposes a structured and replicable procedure for selecting comparables, thereby offering a helpful tool for professionals in addressing the challenges posed by interpreting valuation results.

Author Contributions

The work should be attributed equally to the Authors.

Bibliography

- Agosta M., Schimmenti E., Di Franco C.P. & Asciuto A. (2023). Analysis of the initial steps of the Market Comparison Approach (MCA) for its application to agricultural land: parameters of the market segment and real estate data. *Aestimum*, 83, 33-45.
- Associazione Bancaria Italiana (ABI). (2022). *Linee guida per la valutazione degli immobili in garanzia delle esposizioni creditizie*.
- Berloco A.D. (2012). La stima dei valori dei beni fondiari agricoli attraverso il market approach. In *Conference book proceedings "Evoluzione dei valori fondiari e politiche agricole", XLII Incontro di Studi Ce.S.E.T. Palermo, 22-23 Novembre 2012*.
- Berloco A.D., Fratepietro G. & Grittani G. (1991). La valutazione a più parametri: dalla teoria alla prassi.

- Genio Rurale*, 10, 15-20.
- Benvenuti A., Salvo F. & Tavano D. (2023). The Mortgage Lending Value (MLV): proposal for a new calculation procedure. *Aestimum*, 83, 21-31.
- Casini L., Marone E. & Scozzafava G. (2023). La scuola estimativa italiana, gli International Valuation Standard (IVS) e il Codice delle valutazioni immobiliari: i problemi di natura metodologica e applicativa. *Aestimum*, 83, 69-81.
- Ciuna M., De Ruggiero M., Manganelli B., Salvo F. & Simonotti M. (2017). Automated valuation methods in atypical real estate markets using the mono-parametric approach. In *Computational Science and Its Applications-ICCSA 2017: 17th International Conference, Trieste, Italy, July 3-6, 2017, Proceedings, Part III 17* (pp. 200-209). Springer International Publishing.
- Ciuna M., Salvo F. & Simonotti M. (2015). Appraisal value and assessed value in Italy. *International Journal of Economics and Statistics*, 3, 24-31.
- Coombs C.H. (2017). Psychological scaling without a unit of measurement. In *Scaling* (pp. 281-299). Routledge.
- d'Amato M. (2018). Supporting property valuation with automatic reconciliation. *Journal of European Real Estate Research*, 11(1), 125-138.
- d'Amato M., Cvorovich V. & Amoroso P. (2017). Short tab market comparison approach. An application to the residential real estate market in Bari. *Advances in Automated Valuation Modeling: AVM After the Non-Agency Mortgage Crisis*, 401-410.
- Del Giudice V., Salvo F., De Paola P., Del Giudice F.P. & Tavano D. (2024). Ex-Ante Flooding Damages' Monetary Valuation Model for Productive and Environmental Resources. *Water*, 16(5), 665.
- De Paola P., Previtera S., Manganelli B., Forte F. & Del Giudice F.P. (2023). Interpreting Housing Prices with a Multidisciplinary Approach Based on Nature-Inspired Algorithms and Quantum Computing. *Buildings*, 13(7), 1603.
- De Paola P. (2024). Real Estate Valuations with Small Dataset: A Novel Method Based on the Maximum Entropy Principle and Lagrange Multipliers. *Real Estate*, 1(1), 26-40.
- De Ruggiero M., Manganelli B., Marchianò S., Salvo F. & Tavano D. (2020). Comparative and evaluative economic analysis of ground mounted photovoltaic plants. *Values and Functions for Future Cities*, 181-199.
- De Ruggiero M. & Salvo F. (2011). Misure di similarità negli adjustment grid methods. *Aestimum*, 47-58.
- De Ruggiero M., Salvo F., Tavano D. & Zinno R. (2022). When Green Turns into Value. In *Urban Regeneration Through Valuation Systems for Innovation* (pp. 279-289). Cham: Springer International Publishing.
- Famularo N. (1940). Una svolta decisiva nell'estimo catastale. *Rivista del catasto e dei servizi tecnici erariali*.
- Famularo N. (1959). *La stima dei fabbricati*. Edizioni Calderini.
- Giannoccaro G., Goduto B., Prosperi M. & de Gennaro B.C. (2016). Il metodo del prezzo edonico per la stima del valore della risorsa idrica. Un'applicazione empirica nell'area irrigua della Capitanata (Puglia). *Aestimum: Centro Studi di Estimo e di Economia Territoriale (Ce.SET)*, 68.
- Morano P., Salvo F., De Ruggiero M., Tajani F. & Tavano D. (2024). Oligopsony Hypothesis in the Real Estate Market. Supply Fragmentation and Demand Reduction in the Economic Crisis. In *Science of Valuations: Natural Structures, Technological Infrastructures, Cultural Superstructures* (pp. 265-274). Cham: Springer Nature Switzerland.
- Romano D. (2002). Le problematiche valutative delle risorse naturali e ambientali. *La valutazione degli investimenti sul territorio*, 39.
- Salvo F., Dell'Ovo M., Tavano D. & Sdino L. (2021a). Valuation approaches to assess the cultural heritage. In *New Metropolitan Perspectives: Knowledge Dynamics and Innovation-driven Policies Towards Urban and Regional Transition Volume 2* (pp. 1746-1754). Springer International Publishing.
- Salvo F., De Ruggiero M. & Tavano D. (2021c). Compensation Valuation Due to Hydraulic Constraints. In *Computational Science and Its Applications-ICCSA 2021: 21st International Conference, Cagliari, Italy, September 13-16, 2021, Proceedings, Part VIII 21* (pp. 279-288). Springer International Publishing.
- Salvo F., De Ruggiero M. & Tavano D. (2022). Social Variables and Real Estate Values: The Case Study of the City of Cosenza. In *Values, Cities and Migrations: Real Estate Market and Social System in a*

- Multi-cultural City* (pp. 173-186). Cham: Springer International Publishing.
- Salvo F., De Ruggiero M., Tavano D., De Paola P. & Del Giudice F.P. (2022). Analytical implications of mortgage lending value and bottom value. *Buildings*, 12(6), 799.
- Salvo F., Romita T., De Ruggiero M. & Tavano D. (2020). Residential tourism and real estate appraisal. *Valori e Valutazioni*, (25).
- Salvo F., Tavano D. & De Ruggiero M. (2021b). Hedonic price of the built-up area appraisal in the market comparison approach. In *New Metropolitan Perspectives: Knowledge Dynamics and Innovation-driven Policies Towards Urban and Regional Transition Volume 2* (pp. 696-704). Springer International Publishing.
- Schimmenti E., Asciuto A., Mandanici S. & Viviano P. (2012). L'utilizzo della regressione multipla nelle indagini estimative condotte in mercati fondiari attivi: il caso studio di oliveti e vigneti in un territorio siciliano. *Aestimium*, 60(1), 53-84.
- Shepard R.N., Kilpatrick D.W., & Cunningham J.P. (1975). The internal representation of numbers. *Cognitive psychology*, 7(1), 82-138.
- Simonotti M. (1985). La comparazione e il sistema generale di stima. *Rivista di economia agraria*, 4, 542-560.
- Simonotti M. (1987). Esposizione diagrammatica del sistema generale di stima. *Rivista di economia agraria*, (1).
- Simonotti M. (1990). L'evoluzione della metodologia estimativa tradizionale. *Genio Rurale*, 53(2), 11-20.
- Simonotti M. (1994). I sistemi lineari nelle valutazioni estimative. *Genio Rurale*, 9, 13-20.
- Simonotti M. (2003). L'analisi estimativa standard dei dati immobiliari. *Genio Rurale*, 10, 26-35.
- Simonotti M. (2006). *Metodi di stima immobiliare. Applicazione degli standard internazionali* (pp. 1-423). Dario Flaccovio.
- Simonotti M. (2009). Mercato immobiliare. Gli standard valutativi internazionali. *GEOCENTRO*, 2, 44-47.
- Simonotti M. (2011). *Valutazione immobiliare standard*. Stimatrix.
- Simonotti M., Salvo F., Ciuna M. & De Ruggiero M. (2016). Measurements of rationality for a scientific approach to the market-oriented methods. *Journal of Real Estate Literature*, 24(2), 403-427.
- Tajani F., Morano P., Salvo F. & De Ruggiero M. (2020). Property valuation: the market approach optimised by a weighted appraisal model. *Journal of Property Investment & Finance*, 38(5), 399-418.
- Tecnoborsa (2018). *Codice delle valutazioni immobiliari* (5th ed.). Rome, Italy: Tecnoborsa.
- Tempesta T. (2011). Un'analisi dei fattori che influenzano il valore dei rustici a destinazione residenziale nel Veneto. *Aestimium*, 59-74.
- Voogd J.H. (1982). Multicriteria evaluation for urban and regional planning.
- Yalpir S. & Unel F.B. (2017, September). Use of Spatial Analysis Methods in Land Appraisal; Konya Example. In *5th International Symposium on Innovative Technologies in Engineering and Science (ISITES2017)*, Baku, Azerbaijan.
- Yu P.L. (1973). A class of solutions for group decision problems. *Management science*, 19(8), 936-946.
- Zeleny M. (1973). Compromise programming. *Multiple criteria decision making*.
- Zeleny M. (1982). *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw-Hill, Company.

Il sistema di ripartizione e le misure di razionalità nella valutazione dei terreni agricoli policolture

Francesca Salvo¹, Daniela Tavano^{1,*}, Giovanni Rubuano²

¹ Dipartimento di Ingegneria dell'Ambiente, Università della Calabria, Via Pietro Bucci, 87036 Rende, Italia; francesca.salvo@unical.it, daniela.tavano@unical.it

² Associazione GEO.VAL.ESPERTI, Circonvallazione Clodia 163/167, 00183 Roma, Italia; consulente@giovannirubuano.it

* corresponding author

Parole chiave

sistema di ripartizione, procedimenti *market-oriented*, similarità, affidabilità, scelta dei comparabili, metodo del punto ideale

Abstract

La valutazione dei terreni agricoli è un'attività complessa, influenzata da mercati caratterizzati da scarsa trasparenza e ridotta attività che limitano la possibilità di costituire un campione estimativo sufficientemente rappresentativo. La scarsità di informazioni che caratterizza i mercati fondiari rende inapplicabili i modelli statistici ed econometrici tradizionali mentre i modelli matematici basati su sistemi di valutazione, come il Sistema Generale di Stima (SGS) e il Sistema di Ripartizione (SR), offrono una soluzione efficace. L'SR, in particolare, scompone il valore di un immobile complesso nelle sue componenti principali, utilizzando i prezzi medi impliciti per quantificare il contributo di ciascuna parte al prezzo complessivo. Questo metodo, utilizzato principalmente per la stima dei valori medi legati alle caratteristiche superficiali, ben si presta alla valutazione di terreni caratterizzati da diverse colture. Sebbene la letteratura estimativa ne attesti l'affidabilità come strumento per la valutazione dei fondi agricoli, il suo impiego pratico rimane tuttora piuttosto limitato. Per colmare questo divario, il presente lavoro esamina l'applicabilità dell'SR ai mercati fondiari attraverso la presentazione di un caso concreto di stima. Gli obiettivi principali sono illustrare il processo di determinazione del valore di stima e analizzare i benefici derivanti dalla selezione ottimale dei comparabili. Questa fase, condotta mediante l'applicazione di specifiche misure al campione estimativo, mette in luce l'importanza della scelta degli immobili di confronto che può risultare determinante nel discernere risultati di stima eterogenei, spesso complessi da interpretare e giustificare senza l'ausilio di opportuni criteri di valutazione.

1. Introduzione

Nel contesto delle valutazioni immobiliari, l'esigenza di adottare procedure che garantiscano stime accurate e affidabili si scontra frequentemente con la limitata trasparenza del mercato immobiliare italiano che rende difficile l'accesso a un numero sufficiente di dati immobiliari (Morano et al., 2024; Salvo et al., 2021b; De Ruggiero et al., 2022). Questa carenza informativa influisce negativamente sia sull'attività professionale, riducendo la disponibilità di dati di mercato indispensabili per effettuare valutazioni adeguate, sia sull'andamento del mercato stesso e sulle decisioni di investimento (Simionotti, 2009; De Paola et al., 2023; De Paola, 2024; Salvo et al., 2022; Salvo et al., 2023; d'Amato, 2017;

d'Amato, 2018). Il problema è particolarmente rilevante nel settore dei beni fondiari, dove la limitata trasparenza del mercato è aggravata dalla scarsa frequenza di transazioni. In queste condizioni, l'impiego di modelli statistici ed econometrici risulta difficilmente praticabile a causa della mancanza di dati osservabili. Allo stesso tempo, l'uso di procedimenti estimativi diretti (monoparametrici) è sconsigliato, poiché l'impiego di un unico parametro non riesce a catturare adeguatamente la complessità intrinseca dei beni fondiari (Simonotti, 2009; Yalpir & Unel, 2017). I modelli matematici fondati sui sistemi di valutazione, di contro, si adattano bene alle circostanze operative delineate dai mercati fondiari permettendo l'applicazione di stima anche in presenza di un campione estimativo costituito da pochi dati. Tra questi si annoverano il Sistema Generale di Stima (SGS) e il Sistema di Ripartizione (SR): il primo mira a fornire una misura quantitativa del valore di stima mediante un approccio olistico che considera il bene nella sua totalità; il secondo ha l'obiettivo di suddividere il valore complessivo di un bene in parti o componenti distinte, attribuendo a ciascuna un valore parziale (Famularo, 1940). Tali modelli sono formalmente riconosciuti sia dal Codice delle Valutazioni Immobiliari (Tecnoborsa, 2018) sia dalle Linee Guida per la Valutazione degli Immobili in Garanzia delle Esposizioni Creditizie (ABI, 2022), dimostrando come la teoria matematica applicata alla stima immobiliare trovi un riscontro pratico e affidabile anche in contesti caratterizzati da dati limitati, in linea con le esigenze del metodo di confronto di mercato.

In particolare, il metodo SR si basa sulla funzione di ripartizione che scompone il prezzo di mercato di un immobile complesso nelle sue componenti per determinare il contributo di ciascuna alla formazione del prezzo o del canone. Le funzioni di ripartizione derivanti da ciascuna osservazione costituiscono il sistema di ripartizione, la cui soluzione determina i prezzi medi unitari delle diverse caratteristiche dell'immobile, permettendo così di calcolarne il valore complessivo. Questo approccio teorico tiene conto di tutte le caratteristiche immobiliari, permettendo di quantificare l'influenza di ciascuna sul prezzo di mercato. Tuttavia, il metodo è particolarmente efficace quando si opera in mercati immobiliari con caratteristiche omogenee, soprattutto in relazione alla consistenza degli immobili (Simonotti, 2006). Tale circostanza rende l'impiego dell'SR particolarmente indicato per quei mercati immobiliari in cui i beni sono definiti principalmente da caratteristiche superficiali, come nel caso dei terreni policolturali, che, grazie alla varietà di coltivazioni presenti, mostrano una composizione eterogenea delle superfici.

Sebbene la letteratura estimativa consolidata riconosca il metodo SR come una tecnica valida per la stima dei fondi agricoli, il suo impiego pratico rimane relativamente limitato rispetto ad altre metodologie. Per colmare il divario tra il riconoscimento teorico del metodo SR e la sua applicazione concreta, questo studio si propone di approfondirne l'utilizzo nel contesto dei mercati fondiari, esaminandone limiti e potenzialità operative. L'analisi si concentra su un caso di studio specifico: la stima di un terreno agricolo policulturale alle pendici dell'Etna. Attraverso questo esempio concreto, il presente lavoro illustra in modo sistematico il processo che porta all'individuazione del valore di stima, analizzando ogni fase, dalla raccolta e valutazione dei dati fino alla determinazione finale del valore. Un obiettivo aggiuntivo è l'esplorazione dei vantaggi legati alla selezione della migliore combinazione di comparabili, elemento cruciale nei processi di stima al fine di ottenere valutazioni coerenti e affidabili. Lo studio impiega specifici criteri per valutare la qualità del campione di immobili comparabili, mutuando la logica operativa del metodo del «punto ideale». Questo approccio decisionale classifica le alternative in funzione della loro distanza da un punto ideale teorico, che rappresenta la soluzione ottimale rispetto a tutti i criteri considerati. Le alternative vengono valutate in base alla loro vicinanza a tale punto, privilegiando quelle che si avvicinano maggiormente. In questo specifico contesto, il metodo è utilizzato per ordinare gli immobili comparabili in funzione della loro aderenza ai criteri chiave della comparazione: la similarità rispetto al bene oggetto di stima e l'affidabilità dei prezzi di compravendita. L'obiettivo ultimo è dimostrare come un processo di selezione accurato, fondato su un solido impianto teorico, possa accrescere in modo significativo la precisione delle valutazioni, offrendo parametri di giudizio efficaci per fronteggiare le problematiche derivanti dall'eterogeneità e dalle complessità interpretative insite nei risultati di stima generati dai sistemi di equazioni.

Il presente lavoro si sviluppa attraverso quattro sezioni principali. Nella prima sezione, viene condotta un'analisi approfondita dei metodi estimativi comunemente adottati nella letteratura, con particolare attenzione alle procedure orientate al mercato. In questa fase, vengono evidenziati tanto i risul-

tati ottenuti quanto le criticità e i limiti operativi che emergono dall'applicazione di tali metodi, delineando un quadro chiaro delle attuali sfide nell'ambito della stima fondiaria. La seconda sezione si addentra in un'analisi teorica rigorosa del procedimento di stima SR di cui vengono esaminati i fondamenti. La sezione si concentra, inoltre, sulla trattazione delle misure di similarità e affidabilità, utilizzate come parametri chiave nella proposta metodologica di selezione della migliore combinazione di comparabili. La terza sezione si concentra sulla presentazione di un caso di studio concreto, in cui il metodo SR viene applicato per la stima di un fondo agricolo e l'approccio metodologico del "punto ideale" viene messo in pratica al fine di individuare, tra molteplici combinazioni di comparabili, quella da cui deriva il più appropriato valore di stima. La sezione conclusiva si dedica alla discussione dei risultati emersi dall'analisi e dalla sperimentazione condotta, offrendo una riflessione critica sulle implicazioni operative e teoriche del lavoro svolto.

2. Background

Il presente paragrafo, senza alcuna pretesa di esaustività in ragione dell'ampiezza e complessità della materia, intende offrire una panoramica sull'applicazione delle procedure *market-oriented* finora adottate in letteratura.

La valutazione dei terreni agricoli è un'attività che, da una prospettiva specifica, risulta più complessa rispetto a quella degli immobili urbani. Tale complessità è da ascrivere ad un mercato caratterizzato sovente da scarsa trasparenza e ridotta attività, caratteristiche queste che portano alla rilevazione di un ridotto campione di beni simili al bene oggetto di stima. Sebbene infatti per gli immobili urbani sono stati fatti numerosi sforzi per migliorare la conoscenza dell'andamento del mercato e dei fattori che su di esso agiscono, nel caso dei beni fondiari il quadro conoscitivo è ancora scarso e frammentario (Tempesta, 2011).

In questo contesto, l'applicazione di procedure econometriche, che consentono di stimare il valore di un fondo agricolo a partire da una serie di osservazioni individuali dei prezzi di compravendita, si dimostra di difficile attuazione nella pratica. Tali procedure richiedono infatti un numero significativo di osservazioni per produrre risultati affidabili (Giannoccaro et al., 2016). Al contrario, l'adozione di metodologie di valutazione deterministiche, come la Stima Monoparametrica, il *Market Comparison Approach* (MCA), il Sistema Generale di Stima e il Sistema di Ripartizione, presenta il vantaggio di poter operare con campioni estimativi di ridotte o ridottissime dimensioni (Simonotti, 1985; Salvo et al., 2021a). Questi approcci riducono inoltre la dipendenza da valutazioni basate esclusivamente sull'esperienza soggettiva dell'esperto, una pratica ancora diffusa nel segmento dei beni fondiari (Ciuna et al., 2015; Simonotti, 2003). Nella Stima Monoparametrica, la discriminante tra il bene da valutare e quelli posti a confronto è un unico parametro. Qualora la caratteristica differenziale tra i beni sia soltanto una, la comparazione può essere svolta impiegando un unico parametro di natura tecnica; qualora invece i beni risultino diversi per più di una qualità, circostanza questa non rara data la moltitudine di caratteristiche che connotano i fondi agricoli (fertilità, giacitura, ecc.) e il soprassuolo (specie arboree, varietà, età, forma di allevamento, ecc.), si deve ricorrere a un parametro economico capace di riassumere in esso tutti i fattori caratterizzanti i beni medesimi (Schimmenti et al., 2012). A tal proposito, è importante sottolineare che i parametri economici non sono sempre facilmente rilevabili né capaci di sintetizzare l'effetto complessivo di tutte le caratteristiche di un bene sulla determinazione del suo valore. Ne consegue che, nella prassi estimativa, il confronto viene spesso condotto utilizzando un unico parametro tecnico, ipotizzando che esso rappresenti l'unica caratteristica distintiva tra il bene oggetto di stima e quelli selezionati per la comparazione (Schimmenti et al., 2012). Questa ipotesi semplificativa, basata su un presunto elevato grado di omogeneità del campione, tende a ridurre la dimensione del campione stesso, portando frequentemente a una stima di affidabilità limitata (Berloco et al., 1991).

I procedimenti deterministici pluriparametrici, rispetto alla Stima Monoparametrica, portano con sé il vantaggio di esprimersi mediante delle funzioni di stima in cui molteplici caratteristiche immobiliari sono poste in relazione causa-effetto con il prezzo di mercato del bene, pur riuscendo ad operare con un campione ridotto di dati immobiliari. Tra questi procedimenti, l'MCA risulta ancora scarsamente utilizzato nella valutazione dei beni fondiari (Agosta et al., 2023). Una delle poche proposte in questo ambito è quella di Berloco (2012), che ne suggerisce l'utilizzo al fine di garantire valutazioni accurate e robuste

pur operando in un contesto di mercato notoriamente stagnante e opaco. Berloco sottolinea l'importanza di un'attenta identificazione del segmento di mercato da analizzare, in ragione dell'estrema complessità che connota i fondi agricoli, e di una sistematica raccolta dei dati immobiliari. L'autore, inoltre, propone un caso studio in cui il procedimento misto MCA-SGS è applicato per la stima di un fondo agricolo che produce colture cerealicole e foraggere. Riferimenti all'impiego dell'MCA-SGS nell'ambito della stima dei fondi agricoli sono presenti anche nel Codice delle Valutazioni Immobiliari (Tecnoborsa, 2018) e in Simonotti (2011): il primo menziona il procedimento misto nel contesto più generale dell'approccio *market-oriented* per la valutazione dei terreni agricoli; il secondo propone degli esempi applicativi a scopi didattici. In un recente studio, Agosta et al. (2023), in vista di una successiva applicazione dell'MCA, si pongono l'obiettivo di individuare le caratteristiche immobiliari maggiormente rilevanti nei mercati fondiari e indicano per ciascuna di esse il criterio economico o il procedimento a cui riferirsi per la stima del relativo prezzo marginale. Il procedimento deterministico pluriparametrico SR ha radici molto più antiche e, nell'esperienza italiana, discende dal procedimento di stima per valori tipici di Marenghi. Nel 1941 Famularo propone l'applicazione dell'SR nell'ambito degli studi sulla ripartizione del reddito dei terreni agricoli tra le diverse colture di un'azienda policulturale (Simonotti, 1990). Questa proposta ha rappresentato un riferimento storico nelle stime catastali, tuttavia, da quel momento, le applicazioni dell'SR nella letteratura scientifica si sono rarefatte, limitandosi a pochi studi. Il presente lavoro mira a colmare tale divario, riproponendo l'applicazione del metodo per ripartire il prezzo di mercato di terreni a destinazione policulturale. L'obiettivo è quello di evidenziare l'utilità e l'adattabilità dell'SR alle sfide odierne della valutazione fondiaria.

3. Materiali e metodi

3.1. Il sistema di ripartizione

3.1.1. Aspetti generali del procedimento

Il sistema di ripartizione è un procedimento estimativo volto alla ripartizione del prezzo di mercato o del reddito fra le caratteristiche rilevate per un campione di compravendite o di affitti immobiliari. La ripartizione avviene generalmente linearmente e tramite i prezzi medi delle caratteristiche. Tale procedimento trova applicazione nelle stime di immobili atipici e complessi, cioè quando non è possibile applicare i modelli statistici a una sola variabile e i procedimenti estimativi diretti (monoparametrici) per la semplificazione indotta dal calcolo basato su un singolo parametro. L'equazione generica del sistema di ripartizione riflette il principio teorico del procedimento di stima per valori tipici, basato sulla scomposizione di un immobile complesso nelle sue parti costituenti e sulla stima di ciascuna parte; il valore di stima del bene è ottenuto dalla somma delle singole parti.

Il valore complementare è il criterio di stima per il quale il valore di una parte V_j (elemento, componente, caratteristica, ecc.) di un immobile complesso è ottenuto per differenza tra il valore dell'immobile nel suo complesso V_T e il valore della parte che residua V_{T-j} nell'ipotesi di sottrazione della parte da stimare, nel modo seguente (Eq. 1):

$$V_j = V_T - V_{T-j}. \quad (1)$$

Il valore complementare rappresenta il fondamento logico-estimativo del prezzo marginale implicito delle caratteristiche qualitative e quantitative di un immobile, in quanto esprime una variazione di valore totale con la sottrazione (o l'aggiunta) di una parte. Questa proposizione ha valore generale nell'analisi dei prezzi marginali. Il prezzo marginale è a sua volta il punto cardine delle stime basate sulla rilevazione e la raccolta di dati di mercato. Per estensione il prezzo marginale di una caratteristica immobiliare, quale valore complementare, è dato dalla differenza tra il valore dell'immobile che possiede questa caratteristica e il valore dell'immobile che manca della stessa caratteristica a parità di altre condizioni.

L'SR provvede a scomporre le parti di un immobile complesso T e ad attribuire a ciascuna di esse un prezzo medio unitario \bar{P}_j . L'equazione generica dell'SR secondo il criterio complementare si presenta nel modo seguente (Eq. 2):

$$V_T = V_j + V_{T-j}. \quad (2)$$

Indicando con il pedice la relativa misura delle parti, si ottiene sostituendo nella (2) la relazione seguente (Eq. 3):

$$\bar{p}_T \cdot T = \bar{p}_j \cdot j + \bar{p}_{T-j} \cdot (T - j), \quad (3)$$

dove \bar{p}_T è il prezzo medio dell'immobile complesso; T rappresenta la consistenza dell'immobile complesso; \bar{p}_j è il prezzo medio della porzione j -esima dell'immobile complesso; j rappresenta la consistenza della porzione dell'immobile complesso; \bar{p}_{T-j} è il prezzo medio della porzione complementare alla j -esima rispetto all'immobile complesso; $T-j$ rappresenta la consistenza della porzione complementare alla j -esima rispetto all'immobile complesso.

L'SR può simboleggiare il procedimento di stima per valori tipici, che si basa sui punti di merito relativi di ciascuna parte rispetto a una parte presa come riferimento. Il punto di merito w nel criterio di stima complementare si presenta nel modo seguente (Eq. 4):

$$w = \frac{\bar{p}_j}{\bar{p}_{T-j}}; \quad (4)$$

sostituendo nella (3), si ottiene (Eq. 5):

$$V_T = w \cdot \bar{p}_{T-j} \cdot j + \bar{p}_{T-j} \cdot (T - j), \quad (5)$$

in modo che una volta noto il prezzo unitario \bar{p}_{T-j} è possibile stimare il prezzo unitario \bar{p}_j in forza del punto di merito w . Se l'unità di misura delle parti dell'immobile complesso è uniforme, la relazione precedente può essere semplificata nel modo seguente (Eq. 6):

$$V_T = \bar{p}_{T-j} \cdot [(w - 1) \cdot j + T]. \quad (6)$$

In carenza di dati di mercato, la scomposizione del prezzo totale (o del reddito) può avvenire quindi per mezzo di punti di merito.

In linea generale, l'impiego dell'SR mira a condizioni di uniformità delle caratteristiche immobiliari diverse da quelle superficiali considerate e si riferisce in particolare alle caratteristiche di consistenza degli immobili. È dunque un procedimento il cui utilizzo ricorrente avviene in contesti di mercato che vedono la preponderanza nella funzione di stima del valore di mercato di caratteristiche superficiali. Negli immobili composti e nei complessi immobiliari le caratteristiche superficiali si possono distinguere e classificare in base alla destinazione e alla tipologia.

Per un complesso multi-destinazione la superficie può essere suddivisa in: commerciale; residenziale; ecc. Per un opificio la superficie può essere suddivisa in: uffici; capannoni; area esterna; ecc. Per un immobile commerciale la superficie può essere suddivisa in: superficie espositiva; superficie di vendita. Per un fondo agricolo policolturale la superficie può essere suddivisa in: arboree; arbustive ed erbacee; asciutto e irriguo; ecc. Negli immobili residenziali la classificazione opera sulla superficie principale e sulle superfici secondarie.

Le fasi principali del procedimento estimativo SR sono le seguenti (Simonotti, 2006):

1. analisi del mercato per la rilevazione di contratti recenti di immobili appartenenti allo stesso segmento di mercato del bene oggetto di valutazione;
2. rilevazione dei dati immobiliari completi (planimetria della zona, piante, foto, ecc.);
3. scelta delle caratteristiche immobiliari uniformi;
4. compilazione della tabella dei dati;

5. impianto della matrice e dei vettori del sistema di ripartizione;
6. risoluzione del sistema e calcolo dei prezzi unitari;
7. stima dell'immobile oggetto di valutazione e presentazione dei risultati.

3.1.2 Analisi dei prezzi medi

Il sistema di ripartizione si basa sulla funzione di ripartizione che scompone il prezzo o il canone di mercato di un immobile nei prezzi o nei redditi medi unitari delle caratteristiche immobiliari, al fine di conoscere l'apporto di ogni singola caratteristica al prezzo o al canone di mercato.

La funzione di ripartizione, che considera il prezzo di mercato P come somma dei prodotti di ciascuna caratteristica x_i , con $i = 1, 2, \dots, n$, per il relativo prezzo medio, può essere letta nelle due direzioni:

- La prima ripartisce il prezzo totale tra le diverse caratteristiche e i prezzi medi sono incogniti (Eq. 7);

$$P = x_1 \cdot \bar{p}_1 + x_2 \cdot \bar{p}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{p}_n \quad (7)$$

- La seconda compone le diverse caratteristiche nel prezzo totale e i prezzi medi sono noti (ciò è quanto avviene, a esempio, in un preventivo di spesa o in un computo metrico, moltiplicando le quantità per i prezzi unitari) (Eq. 8);

$$x_1 \cdot \bar{p}_1 + x_2 \cdot \bar{p}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{p}_n = P. \quad (8)$$

Una volta individuati gli immobili comparabili a valle della fase di analisi del segmento di mercato, per ciascuno di essi si scrive l'equazione di ripartizione. L'insieme delle equazioni di ripartizione, una per ciascun comparabile, fornisce un sistema di equazioni lineari definito specificatamente "sistema di ripartizione" nel quale i prezzi medi unitari rappresentano le incognite e i prezzi totali i termini noti.

Il sistema di equazioni può essere scritto nel seguente modo (Famularo, 1957) (Eq. 9):

$$\begin{cases} P_1 = \sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \bar{p}_i \\ P_2 = \sum_{i=1}^n x_{2i} \cdot \bar{p}_i \\ \dots \\ P_m = \sum_{i=1}^n x_{mi} \cdot \bar{p}_i \end{cases} \quad (9)$$

Indicando con \bar{p}_i il vettore dei prezzi medi $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$ relativi alle caratteristiche, con P_j il vettore dei prezzi di mercato P_1, P_2, \dots, P_m e con D_{ji} la matrice dei coefficienti, nella situazione di riferimento, il sistema in forma determinata ($m = n$) si risolve come segue (Eqs. 10-13):

$$\bar{p}_i = D_{ji}^{-1} \cdot P_j \quad (10)$$

dove:

$$\bar{p}_i = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$D_{ji} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$P_j = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

Se il sistema è sovradeterminato ($m > n$) o sottodeterminato ($m < n$) la soluzione può essere ricavata mediante l'applicazione della matrice pseudo-inversa di Moore-Penrose (Simonotti, 2006).

In particolare:

- se $m > n$ (Eq. 14):

$$\bar{p}_i = (D_{ji}^T \cdot D_{ji})^{-1} \cdot D_{ji}^T \cdot P_j \quad (14)$$

- se $m < n$ (Eq. 15):

$$\bar{p}_i = D_{ji}^T \cdot (D_{ji}^T \cdot D_{ji})^{-1} \cdot P_j. \quad (15)$$

Considerando nell'equazione elementare le caratteristiche x_{0i} , con $i = 1, 2, \dots, n$ dell'immobile da valutare e moltiplicando per i prezzi unitari calcolati risolvendo il sistema di ripartizione, il valore di stima dell'immobile oggetto di valutazione si ottiene nel modo seguente (Eq. 16):

$$V = x_{01} \cdot \bar{p}_1 + x_{02} \cdot \bar{p}_2 + \dots + x_{0n} \cdot \bar{p}_n. \quad (16)$$

3.2 Le misure di razionalità

Come è noto, il concetto di comparazione rappresenta il metodo fondamentale su cui fondare la determinazione del valore di stima. Nell'ambito dei procedimenti estimativi orientati al mercato, la comparazione consiste, in senso stretto, nella valutazione quantitativa delle differenze qualitative che esistono tra il bene oggetto di stima e i beni di prezzo noto rilevati dal mercato. Ai fini della comparazione, le condizioni fondamentali da attenzionare sono due:

1. Disporre di immobili di confronto simili al bene oggetto di stima;
2. Disporre di prezzi noti degli immobili di confronto affidabili e dunque non derivanti da compravendite anomale.

La scelta dei beni di prezzo noto è una operazione di fondamentale importanza per la validità della stima finale.

Le rilevazioni dei dati ai fini della valutazione di un bene sono generalmente poco numerose, sia per la limitazione spaziale, tipica dei beni immobili, sia per la limitazione temporale che caratterizza la dinamica dei prezzi di mercato (Simonotti, 1985; Salvo et al., 2020).

Nella pratica estimativa, è frequente che la valutazione di un bene singolare ponga il problema della costruzione di un insieme di confronto capace di rispettare integralmente le condizioni fondamentali della comparazione. L'insieme di confronto potrebbe includere beni solo parzialmente simili a quello oggetto di stima, con prezzi di compravendita variamente affidabili. Stabilire in che misura tali beni soddisfano i criteri comparativi fondamentali è cruciale per pervenire ad una stima equa e attendibile. Il grado di similarità e affidabilità dei beni di confronto può essere valutato utilizzando specifici coefficienti, denominati «misure di razionalità» (De Ruggiero & Salvo, 2011; De Ruggiero et al., 2020), che permettono di perfezionare il processo di stima e ridurre l'incertezza nel risultato finale.

3.2.1 Il grado di similarità

Il grado di similarità tra il bene oggetto di stima e un generico comparabile può essere stabilito mediante una misura nota come «coefficiente di similarità» (Ciuna et al., 2017).

Una misura in grado di accertare la similarità tra il bene oggetto di stima e ciascun immobile di

prezzo noto, utilizzando tutte le caratteristiche quantitative e qualitative rilevate, ha il suo fondamento nella «vicinanza» tra gli ammontari delle caratteristiche del bene oggetto di valutazione e gli ammontari delle caratteristiche degli immobili posti a confronto. La similarità aumenta con la maggiore prossimità dei valori delle caratteristiche tra il bene oggetto di valutazione e quelli comparabili; viceversa, una significativa distanza tra i valori delle caratteristiche indica una minore similarità (De Ruggiero & Salvo, 2011).

Il grado di similarità di ciascun bene di confronto può essere valutato in funzione della differenza tra il valore della i -esima caratteristica del j -esimo comparabile e quello del bene oggetto di stima. Questa differenza può essere espressa sia in valore assoluto che come quadrato delle distanze standardizzate.

In termini di valore assoluto, il coefficiente di similarità c_{sim}^j del comparabile generico j può essere definito come segue (Eq. 17):

$$c_{sim_a}^j = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{ij} - x_{i0}}{\bar{x}_i} \right| - \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{ij} - x_{i0}}{\bar{x}_i} \right|}{(m-1) \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_{ij} - x_{i0}}{\bar{x}_i} \right|} \quad (17)$$

e in termini di quadrato delle distanze standardizzate, nel modo seguente (Eq. 18):

$$c_{sim_q}^j = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{ij} - x_{i0}}{\bar{x}_i} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{ij} - x_{i0}}{\bar{x}_i} \right)^2}{(m-1) \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{ij} - x_{i0}}{\bar{x}_i} \right)^2} \quad (18)$$

dove x_{ij} è l'ammontare della i -esima caratteristica del j -esimo comparabile; x_{i0} è l'ammontare della i -esima caratteristica dell'immobile da valutare; \bar{x}_i è l'ammontare medio della caratteristica considerata; m è il numero dei comparabili; n è il numero delle caratteristiche.

3.2.2. Il grado di affidabilità

La necessità di stabilire il grado di affidabilità dei comparabili rilevati è legata alla presenza di prezzi di compravendita anomali nel mercato immobiliare. In linea generale, una serie di prezzi di compravendita può essere considerata esente da anomalie se sono valide le seguenti ipotesi:

- I prezzi di compravendita sono stati rilevati nel medesimo segmento di mercato in cui ricade il bene oggetto di valutazione;
- I prezzi di compravendita sono recenti e obbediscono alla definizione di valore di mercato;
- I prezzi di compravendita sono stati rilevati mediante l'adozione di una metodologia coerente e sono stati ricavati da fonti comuni e comparabili.

Il grado di affidabilità dei beni immobili comparabili può essere misurato tramite un indicatore chiamato «coefficiente di affidabilità» (De Ruggiero & Salvo, 2011). Per ciascun immobile comparabile, il grado di affidabilità è valutato in funzione del suo prezzo per unità di superficie. Tale indicatore si basa sulla «prossimità» tra il prezzo unitario del singolo comparabile e il prezzo unitario medio di tutti gli immobili campionati.

Il coefficiente di affidabilità c_{aff}^j del generico comparabile j è calcolato come segue (Eq. 19):

$$c_{aff}^j = \frac{\left(1 - \left| \frac{p_j - \bar{p}}{\bar{p}} \right| \right)^{m+1}}{\sum_{j=1}^m \left(1 - \left| \frac{p_j - \bar{p}}{\bar{p}} \right| \right)^{m+1}} \quad (19)$$

dove p_j è il prezzo per unità di superficie del j -esimo comparabile; \bar{p} è il prezzo per unità di superficie medio degli m comparabili; m è il numero dei comparabili.

3.2.3. Il coefficiente composto

Il grado di similarità evidenzia la corrispondenza tra i beni immobili di confronto e il bene oggetto di valutazione, mentre il grado di affidabilità consente di verificare l'eventuale presenza di prezzi di com-

pravendita anomali all'interno del campione esaminato. Le misure del grado di similarità e del grado di affidabilità possono essere intese come i due criteri fondamentali sulla base dei quali valutare i beni di prezzo noto in vista del loro utilizzo nell'analisi estimativa (Simonotti et al., 2016; Tajani et al., 2020). Per considerare simultaneamente entrambi questi criteri è necessaria l'introduzione di una misura composta ottenuta dalla combinazione dei coefficienti di similarità e di affidabilità. Tale misura viene definita "coefficiente composto" (De Ruggiero & Salvo, 2011).

Il coefficiente composto c_{com}^j del generico comparabile j , può essere espresso nel modo seguente:

- se il coefficiente di similarità è espresso in termini di valore assoluto (Eq. 20):

$$c_{com_a}^j = \frac{c_{sim_a}^j \cdot c_{aff}^j}{\sum_{j=1}^m c_{sim_a}^j \cdot c_{aff}^j} \quad (20)$$

- se il coefficiente di similarità è espresso in termini di quadrato delle distanze standardizzate (Eq. 21):

$$c_{com_q}^j = \frac{c_{sim_q}^j \cdot c_{aff}^j}{\sum_{j=1}^m c_{sim_q}^j \cdot c_{aff}^j} \quad (21)$$

dove $c_{com_a}^j$ e $c_{com_q}^j$ sono i valori dei coefficienti composti del j -esimo comparabile; $c_{sim_a}^j$ e $c_{sim_q}^j$ sono i valori dei coefficienti di similarità del j -esimo comparabile; c_{aff}^j è il valore del coefficiente di affidabilità del j -esimo comparabile; m è il numero dei comparabili.

3.2.4. Applicazione del metodo del punto ideale per la selezione della migliore combinazione di comparabili: misure di razionalità per la validazione del campione estimativo

I coefficienti di similarità, affidabilità e composti possono essere impiegati nelle fasi preliminari delle procedure di stima orientate al mercato, con il precipuo obiettivo di identificare i dati di input più adeguati per il metodo selezionato. Poiché il giudizio di stima è fortemente influenzato dalla scelta degli immobili confronto e, considerando che le condizioni essenziali della comparazione si basano sulla similarità con il bene oggetto di valutazione e sull'affidabilità dei prezzi di mercato, le misure del grado di similarità e affidabilità possono costituire dei criteri efficaci per validare l'inclusione di ciascun comparabile nell'analisi estimativa. Tali criteri permettono di identificare per un dato bene oggetto di stima la sua "migliore combinazione di comparabili" ossia quella che porta alla determinazione del valore di stima maggiormente congruo (Simonotti, 1987).

Partendo dall'assunto che i beni di confronto disponibili sul mercato manifestino vari livelli di similarità con il bene oggetto di stima e che i loro prezzi di vendita offrano distinti gradi di affidabilità, emerge la possibilità di operare una «classificazione» dei comparabili individuati, fondata precisamente su queste due dimensioni. Tale classificazione non solo consente di ordinare i beni di confronto secondo criteri oggettivi di affinità e certezza del dato, ma offre altresì l'opportunità di selezionare il campione estimativo più adeguato per l'esecuzione del procedimento estimativo prescelto. Il concetto di «migliore» va inteso qui nella sua accezione più tecnica, riferendosi a quel campione di stima che, tra le molteplici combinazioni possibili di comparabili, riesce a rispondere con maggiore precisione e rigore alle condizioni fondamentali della comparazione, assicurando così una valutazione che risulti la più congrua e attendibile possibile. Questo approccio non solo eleva la qualità del giudizio estimativo, ma ne rafforza l'affidabilità, in quanto fondato su una scelta ponderata e metodologicamente solida del campione di riferimento.

Il coefficiente composto, rappresentando il tentativo di sintetizzare, in un'unica misura, le due dimensioni fondamentali su cui basare la validazione dei beni comparabili, potrebbe essere impiegato quale strumento per "ordinare" i comparabili da utilizzare nel processo estimativo. Attraverso tale indice, si ambisce a delineare una gerarchia tra i comparabili in base alla quale selezionare quelli che garantiscono il miglior equilibrio tra similarità e affidabilità dei dati. Tuttavia, la struttura moltiplicativa del coefficiente composto presuppone che le due misure — similarità e affidabilità — siano reciprocamente compensabili, come se una carenza in uno degli aspetti potesse essere sanata da un'eccellenza nell'altro. Tale ipotesi, tuttavia, si scontra con le difficoltà pratiche del processo di stima. Un alto coefficiente composto non garantisce, infatti, che il bene di confronto sia il più adatto in assoluto, poiché tale valore po-

trebbe derivare da una combinazione di bassa similarità compensata da una alta affidabilità, o viceversa. L'adozione dei coefficienti composti per l'ordinamento dei beni di confronto, dunque, implica l'assunzione che le due dimensioni della razionalità possano essere trattate come se fossero intercambiabili. Tuttavia, vi sono situazioni in cui tale compensazione non risulta concettualmente valida. Ad esempio, una significativa dissimilarità rispetto al bene oggetto di stima non può essere compensata solo dall'affidabilità del prezzo di compravendita. Allo stesso modo, un comparabile con un prezzo poco attendibile potrebbe risultare utile se le sue caratteristiche sono particolarmente simili a quelle del bene da valutare. In questa prospettiva, il coefficiente composto, oscurando le insidie connesse alla sottile dialettica tra similarità e affidabilità, rischia di offuscare la reale complessità del processo estimativo.

Un'alternativa di rilevante interesse rispetto all'uso dei coefficienti composti per la classificazione dei comparabili risiede nell'approccio metodologico del "punto ideale," originariamente introdotto da Coombs negli anni Cinquanta (Coombs, 1950) e successivamente affinato da Shepard (Shepard et al., 1975) e Milan Zeleny (1982). Questo modello, nato nell'ambito dell'analisi multicriteriale, affronta la risoluzione di un problema attraverso l'identificazione preliminare delle alternative efficienti (non dominate), ossia quelle opzioni per le quali non sussiste alcuna alternativa ammissibile in grado di migliorare un criterio senza compromettere altri obiettivi. Il punto ideale rappresenta il punto di riferimento rispetto al quale possono essere valutate le alternative (Voodg, 1983). Nella "teoria decisionale dell'ideale" (Zeleny 1982; Yu 1973) il punto ideale viene definito come un'alternativa rappresentabile con un vettore i cui elementi sono i valori massimi che ciascun attributo/criterio può raggiungere tra le varie alternative. Nel 1973 Zeleny propone il cosiddetto "assioma della scelta" in base al quale le alternative più prossime al punto ideale sono preferite rispetto a quelle che ne sono più lontane (Zeleny, 1973). In tal modo, la maggiore vicinanza rispetto a ciò che viene percepito come ideale rappresenta il criterio rispetto al quale gli individui effettuano le proprie scelte, bypassando il problema di un'esatta quantificazione del benessere derivante da ciascuna di esse.

Date m alternative ($k = 1, \dots, m$) e s criteri ($w = 1, \dots, s$), lo spazio delle alternative può essere espresso in forma matriciale come (Eq. 22):

$$Y = \{y_w^k\}, \quad (22)$$

dove y_w^k è il valore raggiunto dal criterio w -esimo per l'alternativa k -esima. Il punto ideale è allora definito dal seguente vettore (Eq. 23):

$$y^* = \max_k \{y_w^k\} = \{y_w^*\}. \quad (23)$$

Per determinare il grado di vicinanza di una qualsiasi alternativa y^k a quella ideale, y^* , in termini di distanza d^k , può essere definita un'appropriata famiglia di funzioni di distanza (Eq. 24):

$$L_p(\lambda, k) = \left[\sum_{w=1}^s (\lambda_w)^p (1 - d_w^k)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (24)$$

dove $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ (con $\sum \lambda_w = 1$) è un vettore di pesi assegnati ai vari criteri e p ($1 \leq p \leq \infty$) rappresenta il parametro caratteristico della famiglia di funzioni di distanza (Romano, 2002).

In particolare, casi notevoli della (24) si hanno per particolari valori di p :

- per $p = 1$ – distanza di Manhattan (Eq. 25):

$$L_1(\lambda, k) = \sum_{w=1}^s \lambda_w (1 - d_w^k) \quad (25)$$

- per $p = 2$ – distanza Euclidea (Eq. 26):

$$L_2(\lambda, k) = \left[\sum_{w=1}^s (\lambda_w)^2 (1 - d_w^k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

- per $p = \infty$ – distanza di Chebychev (Eq. 27):

$$L_{\infty}(\lambda, k) = \max_w \{\lambda_w (1 - d_w^k)\}. \quad (27)$$

Variando il parametro p si ottengono, dunque, diverse soluzioni per il calcolo della distanza. L'insieme delle soluzioni ottenute per p compreso tra 1 e ∞ , è definito come «l'insieme di compromesso».

Al parametro p è anche associato il concetto di «compensatorietà». I metodi basati sulla distanza Euclidea e sulla distanza di Manhattan sono considerati compensatori, poiché un punteggio basso ottenuto da un'alternativa su un criterio può essere bilanciato da un punteggio più elevato su un altro criterio. Al contrario, il metodo della distanza di Chebyshev è definito non compensatorio, in quanto un punteggio basso su un criterio influisce direttamente sulla scelta finale, senza possibilità di essere compensato da prestazioni migliori sugli altri criteri. Per $p = 1$, si ottengono funzioni di utilità additive lineari, caratterizzate da una compensazione totale, in cui si osserva un completo *trade-off* tra gli attributi. Man mano che il valore di p aumenta, il grado di compensazione diminuisce progressivamente, fino a raggiungere la compensazione nulla con $p = \infty$. In questo caso, si ha il massimo livello di competizione tra le alternative, poiché la decisione si basa esclusivamente sulla performance di ciascun singolo attributo, senza alcun *trade-off* tra di essi.

Per comprendere appieno le modalità con cui il metodo del punto ideale può condurre alla classificazione e alla selezione della migliore combinazione di comparabili, la Tabella 1 illustra i diversi elementi che compongono il metodo, evidenziando il ruolo specifico che ciascuno di essi riveste nel contesto considerato.

Tabella 1. Componenti del metodo del punto ideale e del problema di selezione della migliore combinazione di comparabili a confronto

Componenti del metodo del punto ideale	Componenti del problema di selezione della migliore combinazione di comparabili
Alternative	Comparabili rilevati
Criteri	Misure di similarità e affidabilità
Pesi	Importanza da attribuire alle misure di similarità e di affidabilità nel processo di stima
Punti ideali	Valori massimi conseguibili dalle misure di similarità e affidabilità

Per quanto riguarda l'assegnazione dei pesi, risulta ragionevole attribuire pari rilevanza a entrambe le misure, poiché ciascuna costituisce una condizione fondamentale per il corretto svolgimento del processo estimativo.

Per ciò che concerne la determinazione dei punti ideali, analizzando le formule (17), (18) e (19) si può osservare che:

- i coefficienti di similarità possono assumere valori appartenenti all'intervallo $0 \leq c_{sim}^j < \frac{1}{m-1}$ (0 se un comparabile è l'unico che si presenta non uguale all'immobile oggetto di stima; $\frac{1}{m-1}$ se l'immobile di confronto è uguale all'immobile oggetto di stima);
- i coefficienti di affidabilità possono assumere valori appartenenti all'intervallo $0 \leq c_{aff}^j \leq \frac{1}{m}$ (0 se il prezzo unitario del generico comparabile si discosta fortemente dal prezzo unitario medio del campione; $\frac{1}{m}$ se il prezzo unitario del generico comparabile coincide con il prezzo unitario medio del campione).

I valori massimi o “punti ideali” delle misure considerate sono dunque i seguenti (Eqs. 28 e 29):

$$y_{sim}^* = \frac{1}{m-1} \quad (28)$$

$$y_{aff}^* = \frac{1}{m} \quad (29)$$

dove y_{sim}^* rappresenta il punto ideale associato alla misura di similarità; y_{aff}^* rappresenta il punto ideale associato alla misura di affidabilità; m rappresenta il numero di comparabili analizzati.

La procedura di selezione della migliore combinazione di comparabili può essere riassunta nei seguenti passaggi:

1. Calcolo dei coefficienti di similarità e affidabilità;
2. Identificazione dei punti ideali associati a ciascun criterio;
3. Calcolo delle distanze tra i coefficienti e i punti ideali;
4. Applicazione della funzione di distanza $L_p(\lambda, k)$;
5. Classificazione dei comparabili;
6. Selezione dei comparabili da impiegare nel procedimento di stima.

L'integrazione delle misure di similarità e affidabilità, applicate seguendo i principi del metodo del punto ideale, eleva la trasparenza e il rigore nella selezione degli immobili di confronto, offrendo una metodologia chiara e strutturata per l'individuazione dei comparabili. Tale approccio costituisce un sostegno essenziale per lo stimatore nelle fasi iniziali dell'analisi estimativa, specialmente nella definizione del campione, contribuendo in modo significativo a rafforzare la coerenza e l'affidabilità dell'intero processo valutativo.

4. Caso studio

4.1. Descrizione del bene oggetto di valutazione

Il terreno agricolo oggetto di stima è ubicato sul versante occidentale dell'Etna, nel territorio del comune di Bronte (CT), comprensorio caratterizzato da un indirizzo colturale prevalentemente pistacchicolo. Presenta una superficie pari a circa 6 Ha e confina con proprietà di terzi e con la SP211, arteria stradale mediante la quale si raggiunge agevolmente il fondo. La morfologia piuttosto irregolare che lo caratterizza è un tratto distintivo proprio di queste aree, in cui si ravvisa, a tratti, la presenza di roccia affiorante che rappresenta il substrato tipico della coltivazione del pistacchio (substrato di origine vulcanica). La buona dotazione di “allofane” conferisce al suolo specifici fattori di fertilità (suolo “andico”). La zona è interessata da un microclima di tipo mesotermico umido e subtropicale, con estate asciutta e precipitazioni nel periodo autunno-inverno (clima mediterraneo). La disponibilità dell'acqua irrigua è garantita dal servizio idrico fornito dall'azienda acquedottistica che serve il comprensorio.

Nel fondo sono presenti alcuni fabbricati. Uno di questi è di recente costruzione ed è destinato a magazzino per il ricovero degli attrezzi e dei mezzi agricoli. Gli altri fabbricati, di più modeste dimensioni, impegnano il fondo per una superficie complessiva di circa 200,00 mq. I citati fabbricati, di antica costruzione, si connotano per l'architettura rurale tipica del territorio etneo. Il pessimo stato di conservazione in cui versano li rende, di fatto, inutilizzabili e necessitevoli di un adeguato intervento di recupero. Sul fondo sono presenti, altresì, delle stradelle poderali che lo attraversano interamente al fine di agevolare la fruibilità.

Il terreno risulta principalmente coltivato a pistacchieto con un sesto di tipo irregolare. La forma di allevamento prevalente è quella a ceppaia con la presenza pressoché esclusiva di *Pistacia vera cultivar* (alias “Napoletana”) innestata su *Pistacia terebinthus*, varietà caratterizzata da una elevata produttività, da un notevole sviluppo vegetativo, da un endocarpo deisciente e da una elevata resa in seme. Oltre a pistacchieto, laddove la morfologia del suolo è più regolare, il terreno è coltivato a seminativo e a vigneto (uva da vino). Nella Tabella 2 sono riportate sinteticamente le superfici dei tre tipi di coltivazione presenti nel fondo in oggetto.

Tabella 2. Dati immobiliari del subject

Caratteristiche	Subject
Superficie pistacchieto (mq)	38.268,00
Superficie vigneto (mq)	1.678,00
Superficie seminativo irriguo (mq)	15.993,00

4.2. Indagine di mercato

4.2.1. Il campione estimativo

Il campione rilevato è composto 6 compravendite avvenute nel quadriennio 2017-2020 di terreni agricoli posti alle pendici dell'Etna; per ciascuna unità campionata le caratteristiche superficiali sono stimate combinando i dati catastali e le misurazioni su mappa. Le unità campionate sono situate nella medesima zona del bene oggetto di valutazione, garantendo così l'omogeneità delle caratteristiche estrinseche. Ulteriori caratteristiche intrinseche, di norma rilevanti ai fini estimativi, quali la fertilità, l'altimetria, l'orografia, la pendenza, e simili, devono essere intese *ceteris paribus*.

Il pistacchieto è la coltura prevalente in tutti i terreni rilevati; sono altresì presenti viti e porzioni di terreno destinate a seminativo irriguo. Trattandosi di fondi agricoli policolturali, le superfici delle colture rappresentate dai vari tipi di coltivazione sono assunte quali variabili esplicative del prezzo. I dati immobiliari rilevati per ciascuna unità campionata sono i seguenti:

- prezzo di compravendita (PRZ), espresso in euro (€);
- superficie del pistacchieto (SPi), espresso in metri quadrati (mq);
- superficie del vigneto (SVi), espresso in metri quadrati (mq);
- superficie del seminativo irriguo (SSI), espresso in metri quadrati (mq).

Nelle Tabelle 3 e 4 sono riportati sinteticamente gli ammontari dei dati rilevati e le principali statistiche descrittive.

Tabella 3. Dati immobiliari del campione estimativo – Tabella dei dati

Comparabile	PRZ (€)	SPi (mq)	SVi (mq)	SSI (mq)
A	45.000,00	23.890,00	0,00	0,00
B	178.000,00	56.867,00	11.658,00	0,00
C	154.000,00	37.421,00	42.809,00	0,00
D	74.000,00	30.456,00	0,00	8.754,00
E	42.000,00	12.469,00	5.689,00	3.421,00
F	30.000,00	10.488,00	3.895,00	0,00
Subject	-	38.268,00	1.678,00	15.993,00

Tabella 4. Statistiche descrittive del campione estimativo

Indice	PRZ (€)	SPi (mq)	SVi (mq)	SSI (mq)
Minimo	30.000,00	10.488,00	0,00	0,00
Massimo	178.000,00	56.867,00	42.809,00	8.754,00
Media	87.166,66	28.598,50	10.675,16	2.029,16
Mediana	59.500,00	27.173,00	4.792,00	0,00
Deviazione standard	63.208,91	17.266,82	16.323,60	3.567,37

4.3. Applicazione del procedimento estimativo SR e selezione della migliore combinazione di comparabili

Completate le fasi del procedimento descritte nel Paragrafo 3.1, relative alla rilevazione dei dati e alla selezione delle caratteristiche, e una volta compilata la tabella dei dati (Tabella 2), si procede alla risoluzione del sistema di ripartizione.

Il sistema di ripartizione relativo al caso di specie si presenta nella seguente forma:

$$\begin{cases} 45.000,00 = 23.890,00 \cdot \bar{p}_{SPi} + 0,00 \cdot \bar{p}_{SVi} + 0,00 \cdot \bar{p}_{SSI} \\ 178.000,00 = 56.867,00 \cdot \bar{p}_{SPi} + 11.658,00 \cdot \bar{p}_{SVi} + 0,00 \cdot \bar{p}_{SSI} \\ 154.000,00 = 37.421,00 \cdot \bar{p}_{SPi} + 42.809,00 \cdot \bar{p}_{SVi} + 0,00 \cdot \bar{p}_{SSI} \\ 74.000,00 = 30.456,00 \cdot \bar{p}_{SPi} + 0,00 \cdot \bar{p}_{SVi} + 8.754,00 \cdot \bar{p}_{SSI} \\ 42.000,00 = 12.469,00 \cdot \bar{p}_{SPi} + 5.689,00 \cdot \bar{p}_{SVi} + 3.421,00 \cdot \bar{p}_{SSI} \\ 30.000,00 = 10.488,00 \cdot \bar{p}_{SPi} + 3.895,00 \cdot \bar{p}_{SVi} + 0,00 \cdot \bar{p}_{SSI} \end{cases}$$

dove ciascuna equazione rappresenta un comparabile e dunque un confronto ai fini della stima del bene in esame.

Una volta individuati sei comparabili e selezionate tre caratteristiche come parametri di confronto per la costruzione della comparazione, la matrice dei coefficienti D_{ji} , derivata dalla tabella dei dati, assume una configurazione rettangolare di ordine 6×3 . In questo contesto, il sistema di equazioni lineari risulta sovradeterminato, poiché il numero di equazioni eccede quello delle incognite ($m > n$). Di conseguenza, la soluzione può essere determinata attraverso l'impiego della matrice pseudo-inversa di Moore-Penrose (Equazione 14). Nello specifico, il vettore dei prezzi medi \bar{p}_i il vettore dei prezzi di mercato P_j e la matrice dei coefficienti D_{ji} , si presentano nella forma seguente:

$$\bar{p}_i = \begin{bmatrix} \bar{p}_{SPi} \\ \bar{p}_{SVi} \\ \bar{p}_{SSI} \end{bmatrix}$$

$$P_j = \begin{bmatrix} 45.000,00 \\ 178.000,00 \\ 154.000,00 \\ 74.000,00 \\ 42.000,00 \\ 30.000,00 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{A.} \\ \text{B.} \\ \text{C.} \\ \text{D.} \\ \text{E.} \\ \text{F.} \end{matrix}$$

$$D_{ji} = \begin{bmatrix} 23.890,00 & 0,00 & 0,00 \\ 56.867,00 & 11.658,00 & 0,00 \\ 37.421,00 & 42.809,00 & 0,00 \\ 30.456,00 & 0,00 & 8.754,00 \\ 12.469,00 & 5.689,00 & 3.421,00 \\ 10.488,00 & 3.895,00 & 0,00 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{A.} \\ \text{B.} \\ \text{C.} \\ \text{D.} \\ \text{E.} \\ \text{F.} \end{matrix}$$

La tecnica della pseudo-inversa di Moore-Penrose consente di ottenere una soluzione al sistema costituito da più osservazioni che incognite andando a minimizzare l'errore algebrico. Tuttavia, è necessario precisare che la soluzione ottenuta con questa minimizzazione è una soluzione puramente algebrica che potrebbe non essere accettabile dal punto di vista del significato estimativo attribuito alle diverse incognite. Nel caso di specie, la risoluzione del sistema conduce al seguente vettore di stima:

$$\bar{p}_i = \begin{bmatrix} 2,67 \\ 1,33 \\ -0,69 \end{bmatrix}$$

in cui il valore unitario relativo al pistacchietto è pari a 2,67 euro a metro quadrato; il valore unitario relativo al vigneto è pari a 1,33 euro a metro quadrato e il valore unitario relativo al seminativo irriguo è pari a -0,69 euro a metro quadrato. Il segno negativo rilevato nell'ultimo valore risulta chiaramente inammissibile dal punto di vista estimativo, in quanto riferito ad una caratteristica di consistenza che, generalmente, contribuisce ad accrescere il valore del bene che la possiede.

Posto il carattere aleatorio della valutazione, è ancora possibile la risoluzione estimativa del sistema di ripartizione in esame, nel presupposto che ciascuna equazione del sistema rappresenti un confronto ai fini della stima (Simonotti, 1985) e ciascun confronto costituisca in sé una stima potenziale. Fatta tale premessa, dal sistema sovradeterminato nel numero delle equazioni ($m > n$) di partenza, costituito da 6 equazioni in 3 incognite, è possibile estrarre diversi sottosistemi determinati ($m = n$), di tre equazioni in tre incognite, ciascuno ottenuto eliminando tre alla volta le equazioni del sistema di partenza. In termini estimativi, eliminare delle equazioni dal sistema equivale ad eliminare certuni comparabili dal campione rilevato.

Nel caso di specie, avendo un campione di partenza costituito da sei comparabili, è possibile configurare venti sottosistemi ciascuno formato da una diversa combinazione di comparabili raggruppati in terne. Risolvendo i venti sottosistemi, qualora esista una soluzione algebrica, si ottengono altrettanti valori di stima che verificano i sistemi da cui derivano.

I vettori di stima relativi ai diversi sottosistemi configurabili nel caso in esame sono riepilogati nella tabella seguente:

Tabella 5. Vettori di stima per ciascun sottosistema

Sottosistema	Combinazione comparabili	Risultati (€/mq)
1°	A-B-C	Sistema impossibile
2°	A-B-D	SPi = 1,88; SVi = 6,08; SSI = 1,90
3°	A-B-E	SPi = 1,88; SVi = 6,08; SSI = -4,70
4°	A-B-F	Sistema impossibile
5°	A-C-D	SPi = 1,88; SVi = 1,95; SSI = 1,90
6°	A-C-E	SPi = 1,88; SVi = 1,95; SSI = 2,17
7°	A-C-F	Sistema impossibile
8°	A-D-E	SPi = 1,88; SVi = 2,11; SSI = 1,90
9°	A-D-F	SPi = 1,88; SVi = 2,63; SSI = 1,90
10°	A-E-F	SPi = 1,88; SVi = 2,63; SSI = 1,04
11°	B-C-D	SPi = 1,92; SVi = 1,05; SSI = -1,69
12°	B-C-E	SPi = 2,92; SVi = 1,05; SSI = -0,09
13°	B-C-F	Sistema impossibile
14°	B-D-E	SPi = 2,71; SVi = 2,03; SSI = -0,99
15°	B-D-F	SPi = 3,46; SVi = -1,62; SSI = -3,59
16°	B-E-F	SPi = 3,46; SVi = -1,62; SSI = 2,35
17°	C-D-E	SPi = 1,68; SVi = 2,13; SSI = 2,62
18°	C-D-F	SPi = 1,76; SVi = 1,62; SSI = 0,60
19°	C-E-F	SPi = 2,26; SVi = 1,66; SSI = 1,35
20°	D-E-F	SPi = 2,08; SVi = 2,09; SSI = 1,20

Tralasciando i sottosistemi che non restituiscono soluzioni ammissibili dal punto di vista algebrico (sistema impossibile) e/o dal punto di vista estimativo (non coerenza nel segno del valore stimato), la varietà dei valori di stima associati alle diverse combinazioni di comparabili riflette ciò che comunemente avviene nella pratica estimativa quando per uno stesso immobile vengono rassegnati giudizi di stima non univoci da parte di diversi periti in ragione del fatto che l'analisi di mercato condotta da ciascuno di essi porta alla formazione di campioni estimativi differenti. Potendosi presentare più matrici dei dati di diversa composizione nei beni di confronto, dunque, è lecito conseguire altrettante stime.

In base all'ipotesi di equiprobabilità dei confronti, configurandosi ciascuna rilevazione di mercato come variabile casuale, non c'è ragione di ritenere che un confronto sia più probabile di un altro; i risultati di stima dunque, seppur diversi, sono tutti egualmente probabili.

È bene tuttavia rimarcare che nelle operazioni estimative la costruzione dell'insieme dei beni di confronto si svolge a partire dal bene oggetto di stima, del quale si definiscono i caratteri rilevanti, le unità di misura di ciascun carattere e le relative modalità; sulla base dei caratteri definiti per il bene di riferimento si procede alla rilevazione dei beni di confronto per formare l'insieme di confronto e, per questi ultimi beni, si rileva anche il prezzo. È lecito supporre, nota la singolarità dei beni immobili, che l'insieme di confronto sia formato da beni in diverso grado simili rispetto al *subject* e che i loro prezzi di compravendita siano in diverso grado affidabili tra loro. La presenza di anomalie più o meno marcate nel campione estimativo, anomalie riconducibili alla similarità delle caratteristiche o all'affidabilità dei prezzi, può inficiare la succitata ipotesi di equiprobabilità dei confronti; ciò comporta l'esistenza di un sottosistema formato da una precisa combinazione di comparabili tra tutte quelle possibili da cui deriva il più appropriato valore di stima.

Al fine di individuare la combinazione ottimale di comparabili tra i vari sottosistemi di confronto derivabili dal sistema iniziale (sei comparabili e tre incognite), i beni di confronto sono esaminati attraverso la procedura fondata sull'approccio metodologico del punto ideale, come delineato nel Paragrafo 3.2.4.

FASE 1 – Calcolo dei coefficienti di similarità e di affidabilità: Il computo dei coefficienti di similarità e affidabilità è condotto mediante l'applicazione delle Equazioni (17) e (19), rispettivamente. La Tabella 6 fornisce una sintesi, per ciascun comparabile del campione estimativo esaminato, dei valori attribuiti ai coefficienti di similarità e affidabilità.

Tabella 6. Misure di razionalità del campione estimativo

Comparabile	Coefficiente di similarità	Coefficiente di affidabilità
A	0,180764	0,159733
B	0,191739	0,033843
C	0,158820	0,182267
D	0,101948	0,161907
E	0,184584	0,200884
F	0,182143	0,261365

FASE 2 – Identificazione dei punti ideali: Mediante le Equazioni (28) e (29) si individuano i punti ideali corrispondenti ai criteri di "similarità" e "affidabilità", rispettivamente:

$$c_{sim}^* = \frac{1}{m-1} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$c_{aff}^* = \frac{1}{m} = \frac{1}{6} = 0,166666667.$$

FASE 3 – Calcolo delle distanze rispetto ai punti ideali: Si procede al calcolo delle distanze d_{sim}^{ij} e d_{aff}^{ij} tra i coefficienti di similarità c_{sim}^j e i coefficienti di affidabilità c_{aff}^j e i rispettivi punti ideali, c_{sim}^* e c_{aff}^* ; tali distanze sono da intendersi come la differenza tra i due valori presa in valore assoluto.

Poiché le misure di similarità e affidabilità presentano intervalli differenti (una varia tra 0 e 0,2, l'altra tra 0 e 0,166666667), è indispensabile procedere alla loro normalizzazione. In assenza di tale accorgimento, si rischierebbe infatti di introdurre un *bias* derivante dalla disparità degli intervalli, con la misura caratterizzata da un intervallo più ampio potenzialmente in grado di influenzare in maniera dominante il risultato complessivo. Per ovviare a questa criticità e garantire un contributo equo di ciascuna variabile, si è adottata la normalizzazione min-max, che scala ogni valore nell'intervallo [0,1].

La Tabella 7 offre una sintesi, per ciascun comparabile del campione estimativo analizzato, delle distanze calcolate tra i valori normalizzati di similarità e affidabilità e i corrispondenti punti ideali. Tale rappresentazione consente di valutare con precisione il grado di scostamento di ogni comparabile rispetto ai valori ottimali definiti.

Tabella 7. Distanze tra i coefficienti di similarità e affidabilità e i relativi punti ideali

Comparabile	Criteri	
	Similarità: d^{sim}_j	Affidabilità: d^{aff}_j
A	0,677771	0,386643
B	0,8	0,166666
C	0,433379	0,485683
D	0,2	0,396196
E	0,720308	0,567510
F	0,693121	0,833333

FASE 4 – Applicazione delle funzioni di distanza: Una volta note le distanze d^{sim}_j e d^{aff}_j si applica la funzione di distanza $L_p(\lambda, k)$, espressa dall'Equazione (24), con l'obiettivo di considerare vari gradi di compensazione tra i criteri di similarità e affidabilità. I casi analizzati sono tre: per $p = 1$, per $p = 2$ e per $p = \infty$. Per ogni criterio non viene espresso un giudizio di preferenza assegnando così gli stessi pesi.

La Tabella 8 riporta i valori assunti dalla funzione di distanza nelle tre casistiche analizzate.

Tabella 8. Valori della funzione di distanza per diversi gradi di compensazione

Comparabile	Funzioni di distanza L_p		
	per $p = 1$	per $p = 2$	per $p = \infty$
A	0,467792788	0,346423888	0,306678478
B	0,516666667	0,428498671	0,416666667
C	0,540468601	0,382616151	0,283310312
D	0,701902041	0,501143534	0,4
E	0,356090826	0,257524182	0,216244668
F	0,236772686	0,17460836	0,153439353

FASE 5 – Ordinamento dei comparabili: Sulla scorta dei valori assunti dalla funzione di distanza, si procede all'ordinamento dei comparabili, designando come migliore il comparabile al quale corrisponde il valore più basso, e, viceversa, come peggiore quello associato al valore più elevato.

La Tabella 9 riporta l'ordinamento dei comparabili per i tre livelli di compensazione considerati.

Tabella 9. Ordinamento dei comparabili per diversi gradi di compensazione

Ranking	Comparabili		
	per $p = 1$	per $p = 2$	per $p = \infty$
1°	F	F	F
2°	E	E	E
3°	A	A	C
4°	B	C	A
5°	C	B	D
6°	D	D	B

I risultati mostrano che l'ordinamento dei comparabili si mantiene stabile per i diversi valori di p , con alcune eccezioni. In particolare, il comparabile F risulta il più vicino al punto ideale in ogni scenario, seguito dal comparabile E e infine dal comparabile A, in due scenari su tre. Nello scenario con compensazione nulla ($p = \infty$), la terza posizione è occupata dal comparabile C. Questo cambiamento indica che,

con una compensazione nulla, il modello è più sensibile a differenze estreme nelle misure, rendendo l'ordinamento meno simile rispetto agli altri scenari. La distanza non compensativa utilizzata con $p = \infty$ accentua l'influenza di un singolo criterio, portando a un ordinamento che differisce maggiormente da quelli ottenuti quando entrambe le misure sono bilanciate. Tuttavia, l'ordinamento per $p = \infty$ non è preferibile per l'applicazione in questione poiché, facendo riferimento a una distanza non compensativa, non tiene conto di entrambi i criteri nell'ordinare le alternative. Negli scenari $p = 1$ e $p = 2$ si osserva un'inversione di posizione tra i comparabili B e C, ma la stabilità complessiva evidenziata rafforza la validità della metodologia utilizzata, dimostrando che il modello è resistente a variazioni nel bilanciamento delle misure e riduce il rischio che una delle due (similarità o affidabilità) domini eccessivamente il processo di stima.

FASE 6 – Selezione dei comparabili da impiegare nel procedimento di stima: Una volta ordinati i comparabili sulla base della loro distanza dal punto ideale, si procede alla formazione della combinazione ottimale, selezionando quelli che presentano le distanze minori e, pertanto, occupano le posizioni più elevate nell'ordinamento. Il numero ideale di comparabili può variare in funzione delle specifiche esigenze del modello di stima adottato. Al fine di risolvere un sistema di equazioni determinato, tenendo conto della presenza di tre incognite, il campione estimativo ottimale sarà composto dai tre comparabili più prossimi al punto ideale.

Nel caso di specie, la terna ottimale di comparabili è data dai beni A, E e F. Il sottosistema di ripartizione relativo alla terna ottimale si presenta dunque nella seguente forma:

$$\begin{cases} 45.000,00 = 23.890,00 \cdot \bar{p}_{SPi} + 0,00 \cdot \bar{p}_{SVi} + 0,00 \cdot \bar{p}_{SSI} \\ 42.000,00 = 12.469,00 \cdot \bar{p}_{SPi} + 5.689,00 \cdot \bar{p}_{SVi} + 3.421,00 \cdot \bar{p}_{SSI} \\ 30.000,00 = 10.488,00 \cdot \bar{p}_{SPi} + 3.895,00 \cdot \bar{p}_{SVi} + 0,00 \cdot \bar{p}_{SSI} \end{cases}$$

Il sistema di equazioni lineari ottenuto selezionando la migliore combinazione di comparabili è determinato ($m = n$) e i corrispondenti vettore dei prezzi medi \bar{p}_i vettore dei prezzi di mercato P_j e matrice dei coefficienti D_{ji} , si presentano nella forma seguente:

$$\bar{p}_i = \begin{bmatrix} \bar{p}_{SPi} \\ \bar{p}_{SVi} \\ \bar{p}_{SSI} \end{bmatrix}$$

$$P_j = \begin{bmatrix} 45.000,00 \\ 42.000,00 \\ 30.000,00 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{A.} \\ \text{E.} \\ \text{F.} \end{matrix}$$

$$D_{ji} = \begin{bmatrix} 23.890,00 & 0,00 & 0,00 \\ 12.469,00 & 5.689,00 & 3.421,00 \\ 10.488,00 & 3.895,00 & 0,00 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{A.} \\ \text{E.} \\ \text{F.} \end{matrix}$$

La risoluzione del sistema conduce al seguente vettore di stima:

$$\bar{p}_i = \begin{bmatrix} 1,88 \\ 2,63 \\ 1,04 \end{bmatrix}$$

in cui il valore unitario relativo al pistacchieto è pari a 1,88 euro a metro quadrato; il valore unitario relativo al vigneto è pari a 2,63 euro a metro quadrato e il valore unitario relativo al seminativo irriguo è pari a 1,04 euro a metro quadrato. La soluzione ottenuta risulta ammissibile dal punto di vista estimativo essendoci coerenza sia nel segno che nell'ammontare dei valori stimati.

In virtù delle premesse che hanno condotto alla selezione delle equazioni adoperate, premesse volte a soddisfare le condizioni fondamentali della comparazione (immobili di confronto simili al bene oggetto di stima e prezzi noti degli immobili di confronto affidabili), è possibile asserire che la soluzione ottenuta è quella da cui deriva il più appropriato valore di stima.

Una volta derivati i prezzi unitari delle caratteristiche che concorrono alla formazione del prezzo, la stima del valore di mercato V del fondo policulturale oggetto di valutazione è svolta applicando l'Equazione (10) nel modo seguente:

$$V = 38.268,00 \text{ mq} \cdot 1,88 \frac{\text{€}}{\text{mq}} + 1.678,00 \text{ mq} \cdot 2,63 \frac{\text{€}}{\text{mq}} + 15.993,00 \text{ mq} \cdot 1,04 \frac{\text{€}}{\text{mq}} = 92.989,70 \text{ €}$$

Si conclude che il valore di stima del fondo è pari a 92.989,70 €

5. Discussione e conclusioni

L'analisi estimativa, che spesso opera in presenza di campioni poco numerosi, formati da pochi dati di compravendita, è inevitabilmente influenzata dalle restrizioni spaziali e temporali della raccolta informativa, nonché dalla natura atipica e complessa dei beni immobili. In molte circostanze, il campione di stima si rivela così esiguo da non permettere l'adozione di tecniche statistiche convenzionali per la determinazione dei valori di stima (Simonotti, 1994; Benvenuti et al., 2023). Questa problematica si manifesta in maniera particolarmente critica nella valutazione dei terreni agricoli per via delle caratteristiche di scarsa trasparenza e di ridotta attività che connotano i mercati fondiari. Ciononostante, la stima dei beni fondiari mantiene un'importanza centrale in molteplici ambiti, poiché costituisce il presupposto per la determinazione di valori equi nelle transazioni immobiliari, nella concessione di garanzie bancarie, nella pianificazione territoriale e nella quantificazione di indennizzi e danni (Del Giudice et al., 2024; Salvo et al., 2021c). In tale contesto, una valutazione equa e affidabile di tali beni si rivela imprescindibile. Di fronte a un quadro conoscitivo scarso e frammentario, una possibile soluzione emerge dall'impiego dei sistemi di valutazione che consentono di operare anche in presenza di un ridotto numero di comparabili.

Tra i modelli matematici fondati sui sistemi di valutazione, il Sistema di Ripartizione (SR), basandosi sull'impiego di funzioni che scompongono il prezzo rilevato di un immobile complesso nei prezzi medi impliciti delle sue componenti principali, ben si presta alla valutazione dei terreni policolturali. L'applicazione del procedimento estimativo SR prevede la rilevazione di immobili comparabili, ciascuno dei quali è descritto da un'equazione di ripartizione. L'insieme di tali equazioni forma un sistema di equazioni lineari, denominato "sistema di ripartizione", in cui i prezzi medi delle caratteristiche rappresentano le incognite, mentre i prezzi totali rappresentano i termini noti.

La rilevazione di un campione composto da un numero di comparabili superiore a quello strettamente necessario per la risoluzione di un sistema determinato permette di accedere a una molteplicità di campioni estimativi, ognuno dei quali conduce alla determinazione di un valore di stima, a condizione che il sistema di equazioni associato ammetta soluzione. In un simile framework, è lecito chiedersi quale campione e, dunque, quale valore di stima sia da preferirsi. Tale questione si traduce in un delicato problema di selezione dei comparabili. Sebbene il Codice delle Valutazioni Immobiliari e le Linee Guida per la Valutazione degli Immobili in Garanzia delle Esposizioni Creditizie riconoscano formalmente la validità dei modelli matematici fondati sui sistemi di valutazione come procedimenti applicabili negli esercizi di stima, non viene esplicitamente indicata una procedura rigorosa per la selezione dei comparabili (Casini et al., 2023). In assenza di una procedura che guidi il professionista nella scelta del campione estimativo da impiegare, un possibile iter procedurale potrebbe consistere nell'applicazione del procedimento SR a tutte le combinazioni possibili di beni simili, ciascuna composta da un numero di elementi pari a quello delle incognite prese in esame. Il principale problema legato a questo modo di procedere consta nel fatto che i risultati di stima, ovvero i prezzi medi delle caratteristiche considerate, derivanti dall'applicazione di ciascuna combinazione di comparabili, possono rivelarsi profondamente eterogenei e, in alcune circostanze, difficilmente interpretabili e giustificabili da un punto di vista estimativo. Tale eterogeneità nei prezzi medi stimati si traduce inevitabilmente in un'analoga eterogeneità nei valori del bene da stimare.

Nel caso studio esaminato in questo lavoro, si è partiti dalla rilevazione di un numero di comparabili eccedente il numero delle caratteristiche esplicative. Dopo aver testato l'applicazione di un sistema sovradeterminato, che ha condotto a una soluzione non accettabile sotto il profilo estimativo, sono state analizzate venti diverse combinazioni di comparabili, organizzate in terne. Alcune delle combinazioni considerate hanno condotto a soluzioni non ammissibili dal punto di vista estimativo o a sistemi impossibili, fenomeno che risulta coerente con la natura stessa dei modelli di valutazione basati su sistemi algebrici. Tra tutte le combinazioni esaminate, soltanto dieci hanno condotto a soluzioni ammissibili, costituendo l'insieme dei probabili valori di stima. In base all'ipotesi di equiprobabilità dei confronti, i

risultati di stima, seppur diversi, sono tutti egualmente probabili. Tuttavia, sorge spontanea la questione su quale risultato estimativo possa essere ritenuto il più equo e rappresentativo della realtà di mercato. Una risposta a tale interrogativo potrebbe fondarsi su una riflessione approfondita circa i principi cardine del processo comparativo.

Facendo leva sulle condizioni fondamentali che regolano la comparazione, ossia la similarità tra i beni di confronto e l'affidabilità dei prezzi rilevati, si può ragionevolmente ipotizzare che la combinazione di comparabili che esprime i gradi più elevati di similarità e affidabilità sia quella capace di generare il valore di stima più equo. In effetti, maggiore è la prossimità dei beni comparabili al bene oggetto di stima e più affidabili sono i dati di mercato impiegati, tanto più il valore risultante può essere considerato aderente alle reali dinamiche di mercato del contesto di riferimento. L'impiego di misure di razionalità, capaci di quantificare il grado di similarità e affidabilità di ciascun bene comparabile, permette di adottare criteri oggettivi e rigorosi per la valutazione dei beni di confronto in vista del loro utilizzo nell'analisi estimativa. Questa valutazione può compiersi attraverso l'approccio metodologico del "punto ideale" che, misurando quanto i livelli di similarità e affidabilità di ciascun comparabile si discostano dal loro valore ideale, ossia dai valori massimi che tali parametri possono raggiungere, consente un ordinamento dei beni sulla base dell'entità di tali distanze. È in base a questo ordinamento che può essere rintracciata la "migliore combinazione di comparabili" la cui dimensione può variare in funzione delle specifiche esigenze del modello adottato; dalla migliore combinazione deriva il più appropriato valore di stima.

L'adozione di una procedura strutturata per la selezione della migliore combinazione di comparabili reca con sé una serie di implicazioni di grande rilevanza. Anzitutto, essa rappresenta una risposta efficace al problema dell'eterogeneità e della discrepanza tra i risultati di stima, che spesso emergono quando il numero di comparabili rilevati supera quello delle incognite del sistema. Sotto questo profilo, la procedura si distingue per il suo vantaggio intrinseco, consentendo di evitare la risoluzione del sistema per ciascuna combinazione possibile. Tale approccio non solo offre un significativo beneficio dal punto di vista computazionale, ma solleva altresì il valutatore dall'onere di dover operare scelte tra soluzioni di stima equiprobabili, le quali risultano spesso difficilmente confrontabili su basi intuitive. Inoltre, la codificazione di una simile procedura rappresenta una soluzione alle controversie che frequentemente emergono nella prassi estimativa. Non è raro, infatti, che differenti periti, chiamati a valutare il medesimo immobile, giungano a conclusioni discordanti. Tale divergenza è facilmente attribuibile all'impiego di campioni estimativi differenti, sollevando così il legittimo quesito su quale tra i valori stimati rifletta con maggiore accuratezza le dinamiche del mercato di riferimento. A tale esigenza di discernimento tra le varie stime, una possibile risposta risiede nell'utilizzo delle misure di similarità e affidabilità, strumenti che, consentendo di valutare i comparabili sulla base dei principi cardine del processo comparativo, orientano la scelta verso il valore più rappresentativo e coerente con le condizioni del mercato.

Esaminando il caso studio in oggetto, è opportuno avanzare un'ultima precisazione. Sebbene la migliore combinazione di comparabili individuata abbia condotto a un valore di stima accettabile, sia dal punto di vista matematico che estimativo, non si può escludere, in senso più generale, l'eventualità che, tra le diverse combinazioni possibili, vi siano terne che non diano luogo a soluzioni accettabili. In tale circostanza, qualora la migliore combinazione dovesse generare un sistema impossibile o un valore di stima non congruo, si procederebbe selezionando la combinazione immediatamente successiva, seguendo l'ordinamento gerarchico stabilito per i beni comparabili. Se anche questa ulteriore combinazione risultasse inadeguata, il procedimento verrebbe ripetuto fino all'individuazione di una combinazione che soddisfi i criteri di ammissibilità.

In conclusione, il presente studio ha evidenziato come il Sistema di Ripartizione (SR) costituisca un valido strumento per la valutazione dei terreni agricoli policolturali, in particolare, nei contesti in cui la disponibilità di dati di mercato risulti limitata. L'analisi condotta, improntata su un solido apparato teorico, ha altresì dimostrato come l'adozione di misure di razionalità, quali i coefficienti di similarità e di affidabilità, possa fornire parametri di valutazione efficaci per affrontare le problematiche legate all'eterogeneità e alle difficoltà interpretative connesse ai risultati di stima che scaturiscono dai sistemi di equazioni. Tale contributo non si limita a colmare il divario esistente tra teoria e prassi nella disciplina della valutazione fondiaria, ma propone anche una procedura strutturata e replicabile per la selezione dei comparabili, offrendo così un utile strumento ai professionisti del settore nell'affrontare le sfide poste dall'interpretazione dei risultati di stima.

Contributo degli autori

Il lavoro va attribuito in parti uguali agli Autori.

Bibliografia

- Agosta M., Schimmenti E., Di Franco C.P. & Asciuto A. (2023). Analysis of the initial steps of the Market Comparison Approach (MCA) for its application to agricultural land: parameters of the market segment and real estate data. *Aestimum*, 83, 33-45.
- Associazione Bancaria Italiana (ABI). (2022). *Linee guida per la valutazione degli immobili in garanzia delle esposizioni creditizie*.
- Berloco A.D. (2012). La stima dei valori dei beni fondiari agricoli attraverso il market approach. In *Conference book proceedings "Evoluzione dei valori fondiari e politiche agricole", XLII Incontro di Studi Ce.S.E.T. Palermo, 22-23 Novembre 2012*.
- Berloco A.D., Fratepietro G. & Grittani G. (1991). La valutazione a più parametri: dalla teoria alla prassi. *Genio Rurale*, 10, 15-20.
- Benvenuti A., Salvo F. & Tavano D. (2023). The Mortgage Lending Value (MLV): proposal for a new calculation procedure. *Aestimum*, 83, 21-31.
- Casini L., Marone E. & Scozzafava G. (2023). La scuola estimativa italiana, gli International Valuation Standard (IVS) e il Codice delle valutazioni immobiliari: i problemi di natura metodologica e applicativa. *Aestimum*, 83, 69-81.
- Ciuna M., De Ruggiero M., Manganelli B., Salvo F. & Simonotti M. (2017). Automated valuation methods in atypical real estate markets using the mono-parametric approach. In *Computational Science and Its Applications-ICCSA 2017: 17th International Conference, Trieste, Italy, July 3-6, 2017, Proceedings, Part III 17* (pp. 200-209). Springer International Publishing.
- Ciuna M., Salvo F. & Simonotti M. (2015). Appraisal value and assessed value in Italy. *International Journal of Economics and Statistics*, 3, 24-31.
- Coombs C.H. (2017). Psychological scaling without a unit of measurement. In *Scaling* (pp. 281-299). Routledge.
- d'Amato M. (2018). Supporting property valuation with automatic reconciliation. *Journal of European Real Estate Research*, 11(1), 125-138.
- d'Amato M., Cvorovich V. & Amoroso P. (2017). Short tab market comparison approach. An application to the residential real estate market in Bari. *Advances in Automated Valuation Modeling: AVM After the Non-Agency Mortgage Crisis*, 401-410.
- Del Giudice V., Salvo F., De Paola P., Del Giudice F.P. & Tavano D. (2024). Ex-Ante Flooding Damages' Monetary Valuation Model for Productive and Environmental Resources. *Water*, 16(5), 665.
- De Paola P., Previtera S., Manganelli B., Forte F. & Del Giudice F.P. (2023). Interpreting Housing Prices with a Multidisciplinary Approach Based on Nature-Inspired Algorithms and Quantum Computing. *Buildings*, 13(7), 1603.
- De Paola P. (2024). Real Estate Valuations with Small Dataset: A Novel Method Based on the Maximum Entropy Principle and Lagrange Multipliers. *Real Estate*, 1(1), 26-40.
- De Ruggiero M., Manganelli B., Marchianò S., Salvo F. & Tavano D. (2020). Comparative and evaluative economic analysis of ground mounted photovoltaic plants. *Values and Functions for Future Cities*, 181-199.
- De Ruggiero M. & Salvo F. (2011). Misure di similarità negli adjustment grid methods. *Aestimum*, 47-58.
- De Ruggiero M., Salvo F., Tavano D. & Zinno R. (2022). When Green Turns into Value. In *Urban Regeneration Through Valuation Systems for Innovation* (pp. 279-289). Cham: Springer International Publishing.
- Famularo N. (1940). Una svolta decisiva nell'estimo catastale. *Rivista del catasto e dei servizi tecnici erariali*.
- Famularo N. (1959). *La stima dei fabbricati*. Edizioni Calderini.
- Giannoccaro G., Goduto B., Prospero M. & de Gennaro B.C. (2016). Il metodo del prezzo edonico per la stima del valore della risorsa idrica. Un'applicazione empirica nell'area irrigua della Capitanata (Puglia). *Aestimum: Centro Studi di Estimo e di Economia Territoriale (Ce.SET)*, 68.

- Morano P., Salvo F., De Ruggiero M., Tajani F. & Tavano D. (2024). Oligopsony Hypothesis in the Real Estate Market. Supply Fragmentation and Demand Reduction in the Economic Crisis. In *Science of Valuations: Natural Structures, Technological Infrastructures, Cultural Superstructures* (pp. 265-274). Cham: Springer Nature Switzerland.
- Romano D. (2002). Le problematiche valutative delle risorse naturali e ambientali. *La valutazione degli investimenti sul territorio*, 39.
- Salvo F., Dell'Ovo M., Tavano D. & Sdino L. (2021a). Valuation approaches to assess the cultural heritage. In *New Metropolitan Perspectives: Knowledge Dynamics and Innovation-driven Policies Towards Urban and Regional Transition Volume 2* (pp. 1746-1754). Springer International Publishing.
- Salvo F., De Ruggiero M. & Tavano D. (2021c). Compensation Valuation Due to Hydraulic Constraints. In *Computational Science and Its Applications-ICCSA 2021: 21st International Conference, Cagliari, Italy, September 13-16, 2021, Proceedings, Part VIII 21* (pp. 279-288). Springer International Publishing.
- Salvo F., De Ruggiero M. & Tavano D. (2022). Social Variables and Real Estate Values: The Case Study of the City of Cosenza. In *Values, Cities and Migrations: Real Estate Market and Social System in a Multi-cultural City* (pp. 173-186). Cham: Springer International Publishing.
- Salvo F., De Ruggiero M., Tavano D., De Paola P. & Del Giudice F.P. (2022). Analytical implications of mortgage lending value and bottom value. *Buildings*, 12(6), 799.
- Salvo F., Romita T., De Ruggiero M. & Tavano D. (2020). Residential tourism and real estate appraisal. *Valori e Valutazioni*, (25).
- Salvo F., Tavano D. & De Ruggiero M. (2021b). Hedonic price of the built-up area appraisal in the market comparison approach. In *New Metropolitan Perspectives: Knowledge Dynamics and Innovation-driven Policies Towards Urban and Regional Transition Volume 2* (pp. 696-704). Springer International Publishing.
- Schimmenti E., Asciuto A., Mandanici S. & Viviano P. (2012). L'utilizzo della regressione multipla nelle indagini estimative condotte in mercati fondiari attivi: il caso studio di oliveti e vigneti in un territorio siciliano. *Aestimum*, 60(1), 53-84.
- Shepard R.N., Kilpatrick D.W. & Cunningham J.P. (1975). The internal representation of numbers. *Cognitive psychology*, 7(1), 82-138.
- Simonotti M. (1985). La comparazione e il sistema generale di stima. *Rivista di economia agraria*, 4, 542-560.
- Simonotti M. (1987). Esposizione diagrammatica del sistema generale di stima. *Rivista di economia agraria*, (1).
- Simonotti M. (1990). L'evoluzione della metodologia estimativa tradizionale. *Genio Rurale*, 53(2), 11-20.
- Simonotti M. (1994). I sistemi lineari nelle valutazioni estimative. *Genio Rurale*, 9, 13-20.
- Simonotti M. (2003). L'analisi estimativa standard dei dati immobiliari. *Genio Rurale*, 10, 26-35.
- Simonotti M. (2006). *Metodi di stima immobiliare. Applicazione degli standard internazionali* (pp. 1-423). Dario Flaccovio.
- Simonotti M. (2009). Mercato immobiliare. Gli standard valutativi internazionali. *GEOCENTRO*, 2, 44-47.
- Simonotti M. (2011). *Valutazione immobiliare standard*. Stimatrix.
- Simonotti M., Salvo F., Ciuna M. & De Ruggiero M. (2016). Measurements of rationality for a scientific approach to the market-oriented methods. *Journal of Real Estate Literature*, 24(2), 403-427.
- Tajani F., Morano P., Salvo F. & De Ruggiero M. (2020). Property valuation: the market approach optimised by a weighted appraisal model. *Journal of Property Investment & Finance*, 38(5), 399-418.
- Tecnoborsa (2018). *Codice delle valutazioni immobiliari* (5th ed.). Rome, Italy: Tecnoborsa.
- Tempesta T. (2011). Un'analisi dei fattori che influenzano il valore dei rustici a destinazione residenziale nel Veneto. *Aestimum*, 59-74.
- Voogd J.H. (1982). Multicriteria evaluation for urban and regional planning.
- Yalpir S. & Unel F.B. (2017, September). Use of Spatial Analysis Methods in Land Appraisal; Konya Example. In *5th International Symposium on Innovative Technologies in Engineering and Science (ISITES2017), Baku, Azerbaijan*.
- Yu P.L. (1973). A class of solutions for group decision problems. *Management science*, 19(8), 936-946.
- Zeleny M. (1973). Compromise programming. *Multiple criteria decision making*.
- Zeleny M. (1982). *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw-Hill, Company.